SPEZIELLE RESONANZEN IN ZWEI- UND DREI-CLUSTER-SYSTEMEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Marius Orlowski
aus Warschau

1979

SPEZIELLE RESONANZEN IN ZWEI- UND DREI-CLUSTER-SYSTEMEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Marius Orlowski
aus Warschau

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 20.Dez.1979

Dekan: Prof.Dr.W.Prandl

1.Berichterstatter: Prof.Dr.E.W. Schmid

2.Berichterstatter: Prof.Dr.K. Wildermuth

Abstract

Drei-Cluster-resonanzen sind ein immer noch wenig erforschter Aspekt des Drei-Körper-Problems geblieben. Insbesondere der Sudden-Break-Up-Resonanz - oder synonym: der wesentlichen Drei-Cluster-Resoananz- , wo alle drei Fragmente mehr oder weniger gleichzeitig auseinanderbrechen, nachdem sie einen langlebigen Compoundzustand gebildet haben, ist bislang verhältnismäßig wenig Interesse gewidmet worden.
Im Rahmen der Schmid'schen N-Cluster_Theorie wird die Wildermuth-Benöhrsche Resonanztheorie auf drei Cluster erweitert. Dieses Drei-Cluster-Resonanzmodell wird in einem mathematisch exakten Formalismus gelöst. Der Dreh- und Angelpunkt dieses Formalismus ist das asymptotische Verhalten der vollen Drei-Teilchen-Resolvente in den verschiedenen Richtungen des sechs-dimensionalen Ortsraumes der Jacobi-Koordinaten. Es werden explizit die Streu-Amplituden und Wirkungsquerschnitte in allen Zwei-Körper-Kanälen und im Aufbruch angegeben.

Außerdem wird ein besonders anschauliches kinematisches Drei-Teilchen-Modell, der sogenannte "Drei-Teilchen-Schnabel", entwickelt. Besondere Aufmarksamkeit in diesem Zusammnehang verdient die Analyse der möglichen Interferenzmöglichkeiten der wesentlichen Drei-Körper-Resonanz mit anderen Resonanztypen des Drei-Körper-Modells.

In einem zusätzlichen Abschnitt werden die Pauli-Resonanzen in i) der Wildermuthschen Resonating Group Theorie, ii) in Schmid'schen Simulationsmodellen untersucht. Es wird gezeigt unter welchen Umständen Pauli-Resonanzen zu Positive Energy Bound States werden können.

Inhaltsverzeichnis

I. Einführung und Zusammenfassung 1

II. Definition der Resonanzwechselwirkung im Rahmen der erweiterten Resonating-Group-Methode 3

1. Kurzer Abriß der allgemeinen Theorie der N-Cluster Dynamik 5

2. Formulierung des Drei-Cluster-Modells 10

3. Formulierung des Modells unter Einbeziehung einer Compoundresonanz 13

4. Drei-Körper-Resonanzen - aktueller Stand der Forschung 18

III. Kinematik des Drei-Körper-Problems mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzphänomene 22

1. Elastische Zwei-Teilchen-Streuung im Geschwindigkeitsraum 25

2. Inelastische Zwei-Teilchen-Streuung 28

3. Drei-Teilchen-Streuung 30

4. Qualitative Diskussion der Resonanzphänomemene 39

5. Der Leuchtturmeffekt 44

IV. Beschreibung von scharfen Compoundresonanzen im Drei-Cluster-Break-Up-Reaktionen 49

1. Einführung 49

2. Faddeevgleichungen für Wellenfunktion mit Drei-Teilchen-Potential 54

3. Asymptotische Gestalt der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion bei Vorgabe von Zwei-Teilchen-Potentialen 62

4. Einfluß der Drei-Teilchen-Compoundresonanz auf die vier Kanäle des Drei-Teilchen-Systems 72

V. Pauli-Resonanzen im Zwei-Cluster-System 79

1. Einführung 79

2. Pauli-Resonanzen in der Resonating-Group-Methode in der Nähe des Oszillatorgrenzfalles 86

3. Pauli-Resonanzen im Schmid-Modell 97

4. Pauli-Resonanzen bei separabler Approximation der Resonating-Group-Potentiale 103

Anhang A: Ableitung der asymptotischen Gestalt der Kanal-resolventen im Drei-Teilchen-System 111

Anhang B: Ableitung der asymptotischen Gestalt der Drei-Teilchen-Resolvente 117

Anhang C: Numerik des n-α-Streuproblems für l=0 und separables Potential vom Rang drei 125

Literatur 133

I. Einführung und Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit über spezielle Resonanzen in Zwei- und Drei-Cluster-Systemen behandelt zwei Themenkreise. Im ersten Abschnitt wurden Drei-Cluster-Resonanzen, und zwar hauptsächlich die gegenseitige Beeinflußung von Compoundmechanismen und Precompound- bzw. Postcompoundmechanismen untersucht. Im zweiten Abschnitt wurden Pauli-Resonanzen, wie sie in der Resonating-Group-Methode auftreten, untersucht. Im Rahmen der Simulationsmodelle zu der Resonating-Group-Methode wird numerisch untersucht, wie die Pauli-Resonanzen von diesen Modellen wiedergegeben werden. In diesem Zusammenhang wird der Übergang zum Oszillatorgrenzfall studiert.

Die Aufgabe in dem ersten Abschnitt der Arbeit war die Bereitstellung des mathematischen Rüstzeugs, welches eine numerische Analyse der Resonanzphänomene eines Drei-Cluster-Systems ermöglichen soll.
Drei-Cluster-Resonanzen sind ein immer noch wenig erforschter Aspekt des Drei-Körper-Problems geblieben. Insbesondere der Sudden-Break-Up-Resonanz - oder synonym: der wesentlichen Drei-Cluster-Resonanz - , wo alle drei Fragmente mehr oder weniger gleichzeitig auseinanderbrechen, nachdem sie einen langlebigen Compoundzustand gebildet haben, ist bislang verhältnismäßig wenig Interesse gewidmet worden.
Im Kapitel II erweitern wir im Rahmen der SCHMID'schen N-Cluster-Theorie die WILDERMUTH-BENÖHR'sche Resonanztheorie des Zwei-Cluster-Falls zu einem Drei-Cluster-Resonanz-Modell. In Kapitel IV wird ein mathematischer Formalismus dargelegt, mit dem das in Kapitel II unterbreitete Drei-Cluster- Modell exakt lösbar wird. Der Dreh- und Angelpunkt dieses Formalismus ist das asymptotische Verhalten der vollen Drei-Teilchen-Resolvente in den verschiedenen Richtungen des sechs-dimensionalen Ortsraums der Jacobi-Koordinaten. Es werden explizit die Streuamplituden und Wirkungsquerschnitte in allen Zwei-Körper-Kanälen und im Aufbruchskanal angegeben.
In Kapitel III wird ein besonders anschauliches kinematisches Drei-Teilchen-Modell, der sogenannte "Drei-Teilchen-Schnabel", entwickelt. Dieses kinematische Modell erlaubt die Natur der Sudden-Break-Up-Resonanz auf dem Hintergrund anderer, stets vorhandener Drei-Körper-

Strukturen zu erfassen und zu quantifizieren. Besondere Aufmerksamkeit in diesem Zusammenhang verdienen mögliche Interferenzphänomene der wesentlichen Drei-Körper-Resonanz mit anderen Resonanztypen des Drei-Körper-Systems.

Im zweiten Abschnitt (Kapitel V) verlassen wir das Drei-Körper-Problem und beschäftigen uns mit den Pauli-Resonanzen in Zwei-Cluster-Systemen. Hier werden ausführlich drei Approximationsmodelle der WILDERMUTH'schen Resonating-Group-Theorie in chronologischer Reihenfolge diskutiert: Das SAITO-Modell, das KUKULIN-Modell, und das SCHMID'sche Modell. In diesem Kontext wird endgültig die Frage beantwortet, unter welchen Umständen Pauli-verbotene (oder fast Pauli-verbotene) Zustände Anlaß zu Resonanzen und/oder Positive Energy Bound States geben können. Auch die Diskussion der Behandlung der Pauli-Resonanzen im Rahmen der besagten Approximationsmodelle nimmt einen breiten Raum ein. Entsprechende Relationen zwischen der Resonating-Group-Methode einerseits und den Approximationsmodellen andererseits werden detailliert erörtert. Es wird ferner gezeigt, daß das Modell von SCHMID alle relevanten Merkmale der Resonating-Group-Methode und der anderen Modelle in "natürlicher" Weise reproduzieren kann. Darüberhinaus - aufgrund struktureller Konsistenz - erlaubt das SCHMID'sche Modell eine Ausdehnung und Beantwortung der Frage nach den Pauli-Resonanzen in Drei-Körper-Systemen.

Abschließend sei es vermerkt, daß jedes Kapitel eine ausführliche Einführung in die jeweilige Thematik besitzt, worauf hiermit verwiesen wird.

II. Definition der Resonanzwechselwikung im Rahmen der erweiterten Resonating Group Theorie

In diesem Kapitel geben wir den theoretischen Rahmen für die Behandlung der Resonanzphänomene in Dreiclustersystemen auf der Grundlage der SCHMID'schen N-Cluster-Theorie [1]. Dabei halten wir uns eng an das WILDERMUTH-BENÖHR'sche Konzept der Zwei-Cluster-Resonanztheorie in der Resonating Group Methode.
Bei der Streuung von Clustern aneinander sind Resonanzen - wegen der inneren Freiheitsgrade - viel zahlreicher als bei Streuung von strukturlosen Teilchen. Scharfe Resonanzen treten nicht nur auf, wenn Drehimpuls oder Coulombbarierre den sofortigen Zerfall eines Quasi-Bindungszustandes verhindert, sondern auch dann, wenn es innere Strukturen gibt, die sich erst in komplizierter Weise überlagern müssen, bevor sie zerfallen können (Compoundkernmodell von N.BOHR) oder wenn Anregung und Zerfall nur über eine schwache symmetriebrechende Kraft erfolgen. Die beiden letztgenannten Resonanzmechanismen können in der Resonating Group Methode durch Aufnahme von antisymmetrischen quadratintegrablen Funktionen in den Testfunktionenraum beschrieben werden, deren Erwartungswerte - bis auf eine Energieverschiebung, die in den interessanten Fällen klein ist - den Resonanzpol bestimmen.
Von demselben Ansatz gehen wir auch im Falle des Drei-Cluster-Problems aus, das wir nicht in voller Allgemeinheit, sondern in dem engeren Sinne von drei Zweikörperkanälen und einem Aufbruchskanal lösen wollen.
Unter einer Dreikörperresonanz kann mancherlei verstanden werden. Nehmen wir an, daß der Dreiclusteraufbruch sich sequentiell vollzieht, daß also das System der drei Cluster α, β und γ beispielsweise zunächst in das Subsystem (α, β) und das Cluster γ aufbricht, mit anschließendem Zerfall des Subsystems (α, β). Diese zwei Zerfallsstufen können resonanzartig vor sich gehen. Im ersten Fall möchten wir von einer Kanalresonanz, im zweiten von einer Subsystem-Resonanz sprechen. Das Vorhandensein oder Ausbleiben der einen,

---

1) Alle Referenzen werden detailliert und gezielt in den folgenden Paragraphen und Kapiteln angegeben, weshalb wir auf sie in dieser Einführung verzichten möchten.

kombiniert mit denselben Möglichkeiten der anderen Resonanz, ergibt drei verschiedene resonanzartige Zerfallsmöglichkeiten, die alle mit derselben Berechtigung Dreikörperresonanzen genannt werden können. Ein weiterer Resonanztyp liegt vor, wenn ein Dreiclustercompoundzustand direkt mit dem Dreiclusterkontinuum koppelt. Wir wollen diesen Fall fortan die wesentlichen Dreikörperresonanz (oder auch Sudden-Breakup-Resonanz) nennen, und auf ihn unser hauptsächliches Augenmerk richten.

Die wesentliche Dreikörperresonanz ist dadurch gekennzeichnet, daß die drei Cluster, nachdem sie längere Zeit (= stark ausgeprägte Resonanz) einen Quasibindungszustand gebildet haben, mehr oder weniger gleichzeitig auseinanderbrechen. Die qualitativen Merkmale dieser Resonanzart im Verein mit den anderen Resonanztypen werden ausführlich im Kapitel III und Kapitel IV diskutiert. In diesem Kapitel definieren wir lediglich das Modell, innerhalb welchem wir die wesentliche Dreikörperresonanz behandeln wollen.

Im Paragraph II.1 geben wir einen kurzen Abriß der allgemeinen SCHMID'schen Theorie der N-Clusterdynamik, die wir in dem darauffolgenden Paragraph II.2 auf ein spezielles Dreikörperproblem einschränken. Innerhalb dieses Dreikörpermodells untersuchen wir dann in §II.3 die mathematischen Möglichkeiten der Beschreibung einer wesentlichen Dreikörperresonanz. Im letzten Paragraph II.4 geben wir schließlich einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung auf dem Gebiet der Dreikörperresonanzen.

II.1. Kurzer Abriß der allgemeinen Theorie der N-Cluster-Dynamik

Eine fundamentale Erweiterung des erfolgreichen WILDERMUTH'schen Clustermodells /1/ von der Zwei-Cluster-Kanäle-Situation zur Viel-Cluster-Kanäle-Situation unter Berücksichtigung asymptotischer Korrekturen wurde von E.W. SCHMID /2-4/ in den Jahren 1977-1979 geleistet. In dieser N-Clustertheorie wird die Wellengleichung für die Relativbewegung der zusammengesetzten Teilchen aus einer vorgegebenen mikroskopischen Schrödingergleichung abgeleitet. Hierbei wird das Pauli-Prinzip ohne jede Einschränkung berücksichtigt. In diesem Konzept werden die Cluster als Punktteilchen behandelt, wobei die inneren Freiheitsgrade der Konstituenten der Cluster und der Einfluß des Pauli-Prinzips ihren Niederschlag in den Clusterwechselwirkungen finden. Auf diese Weise erhält man einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit nichtlokalen und energieabhängigen Potentialen.

In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Abriß dieser Theorie wieder, soweit wir sie für unsere Zwecke benötigen. Diese Theorie ist in den Referenzen /3/ und /4/ nachzulesen. Nehmen wir an, daß wir ein A-Teilchen-Problem in einem bestimmten Energiebereich lösen wollen. Nehmen wir weiter an, daß auf dem mikroskopischen Niveau die Wechselwirkungen bekannt und vom Zwei-Teilchen-Charakter sind, ferner, daß die maximale Anzahl der Cluster, in die das A-Teilchen-System zerfallen kann, durch N gegeben ist. Dann lautet der allgemeine Ansatz für die mikroskopische Wellenfunktion Ψ folgendermaßen:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n_N} \mathcal{A}\{\varphi_{i,1}\,\varphi_{i,2}\ldots\varphi_{i,N}\,\chi_i(\vec{\xi}_{i,1},\vec{\xi}_{i,2}\ldots\vec{\xi}_{i,N})\} +$$

$$+ \sum_{i=n_N+1}^{n_N+n_{N-1}} \mathcal{A}\{\varphi_{i,1}\,\varphi_{i,2}\ldots\varphi_{i,N-1}\,\chi_i(\vec{\xi}_{i,1},\vec{\xi}_{i,2}\ldots\vec{\xi}_{i,N-1})\} +$$

$$\vdots$$

$$+ \sum_{i=n_N+n_{N-1}+\cdots+n_3+1}^{n} \mathcal{A}\{\varphi_{i,1}\,\varphi_{i,2}\,\chi_i(\vec{\xi}_{i,1},\vec{\xi}_{i,2})\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\tilde{n}_{N-1}} \mathbb{A}\left\{\tilde{\varphi}_{i,1}\,\tilde{\varphi}_{i,2}\ldots\tilde{\varphi}_{i,N-1}\,\tilde{\chi}_i\left(\vec{\xi}_{i,1},\vec{\xi}_{i,2}\ldots\vec{\xi}_{i,N-1}\right)\right\} +$$

$$+\sum^{\tilde{n}_{N-1}+\tilde{n}_{N-2}} \mathbb{A}\left\{\tilde{\varphi}_{i,1}\,\tilde{\varphi}_{i,2}\ldots\tilde{\varphi}_{i,N-2}\,\tilde{\chi}_i\left(\vec{\xi}_{i,1},\vec{\xi}_{i,2}\ldots\vec{\xi}_{i,N-2}\right)\right\} +$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{i=\tilde{n}_{N-1}+\tilde{n}_{N-2}+\cdots+\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}} \mathbb{A}\left\{\tilde{\varphi}_i\,\chi_i(\vec{\xi}_i)\right\}. \qquad \text{(II.1.1)}$$

Hier werden die antisymmetrisierten Clustereigenzustände, die auch Spin- und Impulskoordinaten enthalten, mit $\varphi_{i,j}$ bezeichnet. $\mathbb{A}$ ist der Antisymmetrisator. Die Größe n_N ist die Anzahl der realisierten N-Cluster-Konstellationen. Mit $\chi_i(\vec{\xi}_{i,1}, \vec{\xi}_{i,2} \ldots)$ sind die Wellenfunktionen der Clusterschwerpunktsbewegung bezeichnet, wobei $\vec{\xi}_{i,j}$ die entsprechenden Jacobi-Koordinaten sind. Die korrespondierenden Größen mit Tilde versehen, entsprechen Distortions- und Compound-Zustandskorrekturen. Eine typische Korrekturfunktion besteht aus einer vorgegebenen Funktion $\tilde{\varphi}_{j,1}$, die beispielsweise einen quadratintegrablen Compound-Zustand von zwei oder mehreren Clustern darstellt, multipliziert mit den Clusterfunktionen der "Zuschauer"-Cluster $\varphi_{j,2}\,\varphi_{j,3}\ldots$. Dieses Produkt wird dann mit der Funktion $\tilde{\chi}_j(\vec{\xi}_{j,1}, \vec{\xi}_{j,2}, \ldots)$ multipliziert, die die Bewegung der Schwerpunkte des Compoundclusters $\tilde{\varphi}_{j,1}$ und der übrigen Cluster $\varphi_{j,2}, \varphi_{j,3}\ldots$ beschreibt, die wir in Gleichung (II.1.1), um die Bezeichnung zu vereinfachen, ebenfalls mit Tilde versehen haben. Der Ansatz (II.1.1) ist dergestalt konzipiert, daß alle (S-1) Clusterzerlegungen, die aus S und höheren Clusterzerlegungen durch Bindungszustände bereits berücksichtigter Cluster hervorgehen, nicht berücksichtigt sind /5/.
Es wird sich als nützlich erweisen, für den Ansatz (II.1.1) eine abkürzende Schreibweise einzuführen, wobei die Produkte der inneren Wellenfunktionen $\varphi_{i,1}\,\varphi_{i,2}\ldots$ durch Φ_i abgekürzt werden:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}\{\phi_i \chi_i\} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \mathcal{A}\{\tilde{\phi}_i \tilde{\chi}_i\} \equiv \sum_{i=1}^{n+\tilde{n}} \mathcal{A}\{\hat{\phi}_i \hat{\chi}_i\}. \quad \text{(II.1.2)}$$

Das Tilde-Zeichen bezieht sich hierbei auf Distortionszustände. Die Variation der unbekannten Funktionen χ und $\tilde{\chi}$ beim gleichzeitigen Festhalten der inneren Funktionen $\varphi_{i,j}$ und $\tilde{\varphi}_{i,j}$ definiert den gesamten Funktionenraum $\delta\Psi$:

$$\delta\Psi = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}\{\phi_i \delta\chi_i\} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \mathcal{A}\{\tilde{\phi}_i \delta\tilde{\chi}_i\} \equiv \sum_{i=1}^{n+\tilde{n}} \mathcal{A}\{\hat{\phi}_i \delta\hat{\chi}_i\}, \quad \text{(II.1.3)}$$

in dem die mikroskopische A-Teilchen-Schrödingergleichung zu lösen ist:

$$\langle \delta\Psi | (H-E) | \Psi \rangle = 0. \quad \text{(II.1.4)}$$

Hier bezeichnet H den mikroskopischen Hamiltonoperator. Setzen wir die Gleichungen (II.1.2) und (II.1.3) in die Gleichung (II.1.4) ein, so erhalten wir zunächst

$$\sum_{j=1}^{n+\tilde{n}} \langle \mathcal{A}\{\hat{\phi}_i \delta\hat{\chi}_i\} | (H-E) | \mathcal{A}\{\hat{\phi}_j \chi_j\} \rangle = 0 \quad \text{(II.1.5)}$$

und nach einigen Umrechnungen, wobei wir die Größen $\tilde{\chi}_{i,j}$ unter Zuhilfenahme der Greensoperatoren G_{ik}

$$G_{i,k}(E;\xi_i',\xi_k') = \sum\!\!\!\!\!\!\int_e \langle \xi_i' | \tilde{\chi}_i(e) \rangle \frac{1}{E-E(e)} \langle \tilde{\chi}_k(e) | \xi_k' \rangle \quad \text{(II.1.6)}$$

eliminiert haben, erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} \int d\xi_j' \Big[\langle \mathcal{A}\{\phi_i \xi_i'\} | (H-E) | \mathcal{A}\{\phi_j \xi_j'\} \rangle +$$

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_e \sum_{l=1}^{\tilde{n}} \int d\xi_l'' \, \langle \mathcal{A}\{\phi_i \xi_i'\} | (H-E) | \mathcal{A}\{\tilde{\phi}_l \xi_l''\} \rangle \langle \xi_l'' | \tilde{\chi}_l(e) \rangle \frac{1}{E-E(e)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \int d\xi_k''' \, \langle \tilde{\chi}_k(e) | \xi_k''' \rangle \langle \mathcal{A}\{\tilde{\phi}_k \xi_k'''\} | (H-E) | \mathcal{A}\{\phi_j \xi_j''\} \rangle \Big] \times$$

$$\times \langle \xi_j'' | \chi_j \rangle = 0 \qquad (i=1,\ldots,n). \quad \text{(II.1.7)}$$

Das Symbol γ_i repräsentiert jetzt den ganzen Satz der Jacobi-Koordinaten $\vec{\xi}_{i,1}, \vec{\xi}_{i,2} \ldots$. Der Index e symbolisiert das ganze Spektrum der Lösungen, die in die Greensoperatoren G_{ik} eingehen, die ihrerseits die Elimination der Größen $\tilde{\chi}_i$ bewerkstelligen. Die Gleichung (II.1.7) kann symbolisch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum_j \int d\gamma_j'' \left[O_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'') + \tilde{O}_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'') \right] \chi_j(\gamma_j'') = 0. \qquad \text{(II.1.8)}$$

Die Darstellung (II.1.8) erlaubt die Struktur der dynamischen Gleichung für die Cluster abzulesen: Operatorenmatrix (O_{ij}) enthält die Matrix $(T_i - E_{i,rel}) \cdot \delta(\gamma_i' - \gamma_j'')\delta_{ij}$. Zieht man die letztgenannte Matrix ab, so erhält man folgerichtig die gesamte Wechselwirkung $(\mathcal{V}_{ij} + \tilde{\mathcal{V}}_{ij})$ als

$$\mathcal{V}_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'') = O_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'') + (T_i - E_{i,rel})\delta(\gamma_i' - \gamma_i'')\delta_{ij} \qquad \text{(II.1.9)}$$

und

$$\tilde{\mathcal{V}}_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'') = \tilde{O}_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j''). \qquad \text{(II.1.10)}$$

Die Operatoren $\tilde{\mathcal{V}}_{ij}(E;\gamma_i'\gamma_j'')$ rühren von der Elimination der Compound- und Distortionszustände her und beschreiben den Effekt der inneren Freiheitsgrade. Im folgenden listen wir einige wichtige Eigenschaften dieser N-Clustertheorie auf:

1) In dieser Theorie sind die Unitaritätseigenschaften erhalten.
2) Die Wechselwirkungen geben vollständig den Einfluß des Pauli-Prinzips wieder.
3) Die gesamte N-Cluster-Wechselwirkung kann in eine Summe von Zwei-Körper-, Drei-Körper-,... und N-Körper-Operatoren zerlegt werden. Jeder Summand dieser Summe besteht aus einem kompakten Operator, der mit dem Einheitsoperator der Unterräume der Spectatorcluster multipliziert ist.
4) Die Wellenfunktion der Relativbewegung $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ sind Wahrscheinlichkeitsamplituden nur bei asymptotischen Entfernungen. Dieser Umstand erlaubt es, den Wahrscheinlichkeitsfluß und damit die S- und T-Matrix zu definieren.
5) Der Funktionenraum $\delta\Psi$ besitzt einen gewissen Grad der Willkür

durch den Überlapp mit den Korrekturzuständen. Diese Willkür überträgt sich somit auf das Potential $(v_{ij} + \tilde{v}_{ij})$. Dieser Sachverhalt spiegelt die Off-Shell- und Mehrkräfteinterdependenz wieder.

6) Für N=2 ist die Theorie identisch mit der Resonating Group Theorie von WILDERMUTH.

II.2. Formulierung des Drei-Cluster-Modells

In der vorliegenden Untersuchung beschränken wir uns auf einen Drei-Cluster-Fall mit nur einem Drei-Cluster-Kanal und höchstens drei Zwei-Cluster-Kanälen, die über entsprechende Subsystembildung aus dem Drei-Cluster-System hervorgehen. Der Ansatz (II.1.1) reduziert sich in diesem Fall auf den Ausdruck

$$\Psi = \mathcal{A}\{\varphi_a \varphi_b \varphi_c \chi(\vec{\xi}, \vec{\eta})\}, \qquad \text{(II.2.1)}$$

wenn wir alle Compound- und Distortionskorrekturen zunächst vernachlässigen wollen. Im nächsten Paragraph stellen wir die benötigten Sätze von Orts- und Impulskoordinaten zusammen und diskutieren die Gestalt des Operators $\mathcal{O}$, der sich aus dem Ansatz (II.2.1) ergibt. Der A-Teilchen Hamilton Operator läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$H = \sum_{i=1}^{A} \frac{k_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ij} \,. \qquad \text{(II.2.2)}$$

Hier sind $\vec{k}_i$ der Impuls des i-ten Teilchens, m ist die Nukleonenmasse, und V_{ij} das Potential zwischen dem i-ten und dem j-ten Teilchen.
Mit Hilfe von Gleichungen (II.2.1),(II.2.2) und (II.1.4) erhält man nach Separation der Schwerpunktbewegung folgende Bestimmungs-Gleichung für die Wellenfunktion $\chi(\vec{\xi}, \vec{\eta})$:

$$\left(-\hbar^2 \Delta_{\vec{\xi}_1} - \hbar^2 \Delta_{\vec{\eta}_1}\right) \chi(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1) + \int \mathcal{V}_{23}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1') \chi(\vec{\xi}_1', \vec{\eta}_1)\, d\vec{\xi}_1' +$$

$$+ \int \mathcal{V}_{31}(\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_2') \chi(\vec{\xi}_2', \vec{\eta}_2)\, d\vec{\xi}_2' + \int \mathcal{V}_{12}(\vec{\xi}_3, \vec{\xi}_3') \chi(\vec{\xi}_3', \vec{\eta}_3)\, d\vec{\xi}_3' +$$

$$+ \int \mathcal{V}_{123}(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1; \vec{\xi}_1', \vec{\eta}_1') \chi(\vec{\xi}_1', \vec{\eta}_1')\, d\vec{\xi}_1'\, d\vec{\eta}_1' = 0. \qquad \text{(II.2.3)}$$

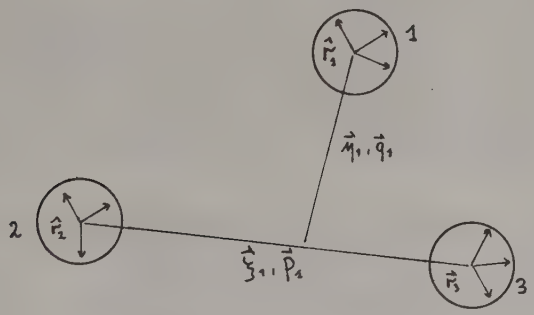
Die Ableitung dieser Gleichung und die Struktur der Potentiale findet man in Referenz /4/. Für das System (n-p-α) wurden diese Potentiale von SEICHTER /6/ berechnet. Die Relativenergie E_{rel} ist die Gesamtenergie abzüglich der Bindungsenergien bzw der Energieerwartungswerte ε_i der Cluster 1,2 und 3 ($E_{rel} = E - |\varepsilon_1| - |\varepsilon_2| - |\varepsilon_3|$). Wir arbeiten im Relativsystem der Cluster Schwerpunkte $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ und benutzen folgende Notation:

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}_i &= (2\mu_i)^{1/2}(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \equiv (2\mu_i)^{1/2}\vec{r}_{jk} \\
\vec{\eta}_i &= (2/\bar{\mu}_i)^{1/2}(m_j\vec{r}_j + m_k\vec{r}_k) = m_i(2/\bar{\mu}_i)^{1/2}\vec{r}_i \\
\vec{p}_i &= (2\bar{\mu}_i)^{-1/2}\vec{k}_i = -(2\bar{\mu}_i)^{-1/2}(\vec{k}_j + \vec{k}_k) \\
\vec{q}_i &= (\mu_i/2)^{1/2}(\vec{k}_j/m_j - \vec{k}_k/m_k) \quad ,
\end{aligned} \tag{II.2.4a}$$

wobei (i,j,k) eine zyklische Anordnung von (1,2,3) bedeutet. $\vec{k}_i$ ist der zu $\vec{r}_i$ kanonisch konjugierte Impuls des i-ten Clusters. Der kinetische Operator im Schwerpunktsystem ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_o = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\hbar^2}{2m_i}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}\right)^2 = -\hbar^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vec{\xi}_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\vec{\eta}_i}\right)^2\right) \qquad i=1,2,3\,. \tag{II.2.4b}$$

Die Verhältnisse sind in der Figur 1 angedeutet.



Figur 1. Das Symbol $\hat{r}_i$ bezeichnet sämtliche innere Koordinaten des Clusters i.

Dabei sind $m_i = A_i m$ und A_i die Anzahl der Konstituenten des i-ten Clusters

mit der Eigenschaft, daß $A_1 + A_2 + A_3 = A$. Die reduzierten Massen sind folgendermaßen definiert:

$$\mu_1 = m_1 m_2/(m_1+m_2) \quad , \qquad \bar{\mu}_1 = m_1(m_2+m_3)/M \, ,$$
$$M = m_1 + m_2 + m_3 = A \cdot m \, . \tag{II.2.5}$$

Ein Wechsel der Beschreibung mittels $\vec{\xi}_i, \vec{\eta}_i$ zu einer Beschreibung mittels der Koordinaten $\vec{\xi}_j, \vec{\eta}_j$ erhält man durch "Rotation":

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_j &= a_{ji}\vec{\xi}_i + b_{ji}\vec{\eta}_i \\ \vec{\eta}_j &= -b_{ji}\vec{\xi}_i + a_{ji}\vec{\eta}_i \end{aligned} \tag{II.2.6a}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} &= -(\mu_i\mu_j)^{1/2}/m_k \, , \quad k \neq i \neq j \\ -b_{ij} = b_{ji} &= (\mu_j/\bar{\mu}_i)^{1/2} \, , \quad i,j = 1,2;\ 2,3;\ 3,1 \, , \end{aligned} \tag{II.2.6b}$$

sodaß

$$a_{ij}^2 + b_{ij}^2 = 1 \, .$$

Analoge Beziehungen gelten für die Impulskoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{q}_j &= a_{ij}\vec{q}_i + b_{ji}\vec{p}_i \\ \vec{p}_j &= -b_{ji}\vec{q}_i + a_{ji}\vec{p}_i \, . \end{aligned} \tag{II.2.7}$$

Für spätere Zwecke führen wir als Abkürzung für die sechsdimensionalen Koordinaten $(\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1)$ oder $(\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2)$ oder $(\vec{\xi}_3, \vec{\eta}_3)$ den sechsdimensionalen Vektor $\vec{R}$ und den dazu konjugierten sechsdimensionalen Impulsvektor $\vec{K}$ ein. Für diese Größen erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(d\vec{R}) = (d\vec{\xi}_i)(d\vec{\eta}_i) \, , \quad R^2 = |\vec{R}|^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 = 2\sum_{\ell=1}^{3} m_\ell r_\ell^2$$
$$E = K^2 = |\vec{K}|^2 = p_i^2 + q_i^2 \, , \quad \vec{K}\vec{R} = \vec{\eta}_i\vec{q}_i + \vec{\xi}_i\vec{p}_i = \sum_{\ell=1}^{3} \vec{k}_\ell \vec{r}_\ell \, .$$

$i = 1,2,3.$ (II.2.8)

II.3. Formulierung des Modells unter Einbeziehung einer Compound-Resonanz

Wir wenden uns jetzt der Compoundresonanz im Dreiclustersystem zu, die in der Einleitung als wesentliche Resonanz bezeichnet wurde. Die Ableitung des T-Operators, der die Drei-Cluster-Compoundresonanz beschreibt, verläuft völlig analog zu der WILDERMUTH-BENÖHR'schen Resonanztheorie im Zweiclustersystem /7/.
Zu diesem Zweck erweitern wir den Ansatz (II.2.1) und erhalten

$$\Psi = \mathcal{A}\{\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\chi(\vec{\xi},\vec{\eta}) + a f\} = \Psi_D + a f . \qquad \text{(II.3.1)}$$

Wir nehmen dabei an, daß f in einem endlichen quadratintegrablen Funktionenraum von antisymmetrischen Dreiclusterzuständen durch Diagonalisierung des mikroskopischen Hamiltonoperators H gefunden ist und einen angeregten Zustand des Drei-Cluster-Compoundzustandes beschreibt; a ist der Variationsparameter. Die Gleichung (II.1.4) nimmt für diesen Ansatz folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} \langle \delta\Psi_0 | (H-E) | \Psi_0 \rangle + a \langle \delta\Psi_0 | (H-E) | f \rangle &= 0 \\ \langle f | (H-E) | \Psi_0 \rangle + a \langle f | (H-E) | f \rangle &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(II.3.2)}$$

Die Umformung der Projektionsgleichung vermöge der Greensoperatoren reduziert sich hier auf eine algebraische Elimination des Variationskoeffizienten a; man erhält:

$$\langle \delta\Psi_0 | (H-E) | \Psi_0 \rangle - \frac{\langle \delta\Psi_0 | (H-E) | f \rangle \langle f | (H-E) | f \rangle}{\langle f | (H-E) | f \rangle} = 0. \qquad \text{(II.3.3)}$$

Der zweite Term der Gleichung (II.3.3) kann zu dem ersten hinzugeschlagen werden und man erhält einen neuen Hamiltonoperator $\bar{H}$,

$$\bar{H} = H - \frac{(H-E)|f\rangle\langle f|(H-E)}{\langle f|H-E)|f\rangle} .$$

Die Auswertung des ersten Terms der linken Seite der vorletzten Gleichung reproduziert die linke Seite der Gleichung (II.2.3). Die

Auswertung des zweiten Summanden der Gleichung (II.3.3) führt zu einem Term, der als Drei-Cluster-Resonanzpotential $\tilde{V}_c$ interpretiert werden kann, das auf die Relativbewegung der drei Cluster wirkt. Das Resonanzpotential $\tilde{V}_c$ hat folgende Gestalt:

$$\tilde{V}_c = F^*(E;\vec{\xi}',\vec{\eta}') \frac{1}{\langle f|(H-E)|f\rangle} F(E;\vec{\xi}'',\vec{\eta}''), \qquad \text{(II.3.4)}$$

wobei $F_E(\vec{\xi}'',\vec{\eta}'')$ folgendermaßen definiert ist:

$$F_E(\vec{\xi}'',\vec{\eta}'') = \int d^{3A}r\, f^*(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_A)(H-E)\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\delta(\vec{\xi}-\vec{\xi}'')\delta(\vec{\eta}-\vec{\eta}''), \qquad \text{(II.3.5)}$$

Mit diesem Potential und bestimmten Faddeevlösungstechniken, die wir im Kapitel IV besprechen, sind wir befähigt, den Einfluß des plötzlichen Zerfalls eines Drei-Cluster-Comüoundzustandes nicht nur in die Zwei-Körper-Kanäle, sondern auch in den Aufbruchskanal zu untersuchen.
Dem Potential $\tilde{V}_c$ in (II.3.4) ist als T-Operator zugeordnet:

$$T_c = |F\rangle \frac{1}{\langle f|(H-E)|f\rangle - \langle F|G(E_{rel})|F\rangle} \langle F|, \qquad \text{(II.3.6)}$$

Dabei ist G die Resovente zum Hamiltinoperator, der die Relativbewegung der drei Cluster in Abwesenheit des Resonanzpotentials beschreibt. Der Operator T (II.3.6) wird in §A.3 abgeleitet und im Kapitel IV untersucht. Die Resonanzamplitude gewinnt man aus (II.3.6) durch Überintegration mit geeigneten Streuzuständen des Drei-Cluster-Systems mit und ohne V_c (siehe Kapitel IV).
Wir können jetzt das gesamte Potential $V_{eff}(1,2,3)$ definieren, für das wir das Dreiclusterproblem lösen wollen:

$$V_{eff}(1,2,3) = \vartheta_{(1,2)} + \vartheta_{(1,3)} + \vartheta_{(2,3)} + \vartheta_{(1,2,3)} + \tilde{V}_{c(1,2,3)}, \qquad \text{(II.3.7)}$$

Für die Lösungstechnik, die im Kapitel IV vorgeschlagen wird, wird sich der Umstand , daß $V_c(1,2,3)$ ein separables Potential in dem Dreiclusterraum ist, als außerordentlich nützlich erwiesen. Die Separabilität von $V_c(1,2,3)$ ergibt sich hier auf eine sehr natürliche Weise. Die restlichen Potentiale in der Gleichung (II.3.7) haben

eine recht komplizierte Struktur: Sie sind teils lokaler teils nichtlokaler Natur und darüberhinaus energieabhängig. Bei der Kompliziertheit der Potentiale in Gleichung (II.3.7) ist es nicht ratsam, den direkten Lösungsweg über die FADDEEV Gleichung einzuschlagen. Man wird daher zunächst versuchen die Potentiale durch einfachere Ausdrücke zu approximieren. Ist dies geschehen, und hat man erreicht, daß das Problem unter Weglassung der Dreikörperpotentiale numerisch lösbar geworden ist, dann kann man wegen der Separabilität der Drei-Körperpotentiale im Dreikörperraum die Lösung des vollen Problems auf algebraische Weise herbeiführen. Ein starkes Dreikörperpotential ist bereits ohne Compoundresonanz vorhanden. Dieses kann man reduzieren, indem man, erstens die redundanten Zweiteilchenzustände zu Bindungszuständen bei sehr hohen Energien macht (siehe Kapitel V) ,und zweitens, indem man das noch verbleibende Drei-Cluster-Pauli-Potential durch eine Off-Shell Transformation reduziert. Es verbleibt dann im vorliegenden Fall eine Gleichung mit reinen Zweikörperkräften, mit einem Drei-Teilchen-Resonanzpotential $V_c(1,2,3)$ und dem reduzierten Dreiteilchenpotential $V^{red}(1,2,3)$.
Wie bereits erwähnt, gewinnen wir im Falle der Separabilität der Dreiteilchenpotentiale die Lösung des Problems (II.3.7) auf rein algebraische Weise aus der Kenntnis der Lösung des Problems ohne die Dreiteilchenpotentiale, wo also das gesamte Potential aus reinen Zweikörperkräften besteht. Wie erhalten wir die letztere?

Die FADDEEV Gleichungen wurden bisher entweder für ganz einfache lokale /8/ oder für separable Potentiale gelöst (EBENHÖH /9/ , DOLLESCHALL /10/, ORYU /11/). Im Falle von separablen Potentialen existieren auch leistungsfähige numerische Rechenprogramme. Als Approximationsmethoden für Zwei-Körper-Resonating-Group-Wechsel-Wirkungen existieren 1) das Fischgrätenmodell von SCHMID /12/ und 2) die Interpolationsmethode /13/, die neulich von SCHMID vorgeschlagen worden ist. Das Fischgrätenmodell wird ausführlich im Kapitel V besprochen.Die Interpolationsmethode ist Gegenstand detaillierter Untersuchungen von KIRCHER /14/. Diese Methoden können die tatsächlichen Potentiale durch separable Potentiale beliebig genau wiedergeben und haben gegenüber anderen Methoden wie Unitary Pole Approximation /15/ oder Unitary Pole Expansion /16/ den Vorteil,daß die physikalische Struktur und Eigenschaften der Resonating Group Potentiale, insbesondere das Pauli-Prinzip adäquat

reproduziert sind. Diese Approximationsmethoden erlauben uns, die entsprechende FADDEEV Gleichung für Zweikörperpotentiale zu lösen.

In der Nähe der Dreikörperresonanz können wir das reduzierte Potential $V^{red}(1,2,3)$ gegenüber $\bar{V}_c(1,2,3)$ vernachlässigen, falls $\bar{V}_c(1,2,3)$ eine hinreichend scharfe Compoundresonanz beschreibt. In diesem Fall sprechen wir von einer Dominanz der Resonanzwechselwirkung. Das effektive Potential im Rahmen unseres Modells lautet dann (unter der Prämisse der Dominanz der Resonanzwechselwirkung)

$$V_{eff}(1,2,3) = v_{(1,2)} + v_{(1,3)} + v_{(2,3)} + \bar{V}_c(1,2,3) . \qquad \text{(II.3.8)}$$

Wie man sehen wird, berechtigt die besagte Dominanz der Resonanzwechselwirkung aber keineswegs zu einer Vernachlässigung der Zweikörperpotentiale $V(1,2)$, $V(1,3)$ und $V(2,3)$ (siehe die Diskussion im Kapitel IV, besonders § IV.2).

Auf die qualitative Fassung der Begriffe Resonanzenergie und scharfe Compound-Resonanz kommen wir im Kapitel IV zurück. Hier können wir nur anmerken, daß die Ableitung der Resonanzstruktur analog zu der Derivation von WILDERMUTH-BENÖHR /7/ und WILDERMUTH-SCHRANNER /17/ im Falle von Zweikörperkanälen verläuft. Dort wurde gezeigt, daß die Resonanzenergie E_c durch den Erwartungswert $\langle F_E | \mathcal{H} | F_E \rangle = \langle f | H | f \rangle = E_c$ und einer additiven Energieverschiebung ΔE_c gegeben ist. Diese Energieverschiebung ist identisch mit dem Realteil des Matrixelements $\langle F_E | G | F_E \rangle$ (siehe Formel (II.3.6), wobei G die Greensfunktion zu dem vollen Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ abzüglich der Resonanzwechselwirkung ist. Der Drei-Cluster-Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ ist durch die Gleichung (II.1.3) implizit definiert worden. Der Imaginärteil von $\langle F_E | G | F_E \rangle$ liefert die Breite der Resonanz. Sind $Re(\langle F_E | G | F_E \rangle)$ und $Im(\langle F_E | G | F_E \rangle)$ hinreichend klein, dann gibt der Zustand F_E Anlass zu scharfen Compoundresonanzen, die durch eine mikroskopisch abgeleitete BREIT-WIGNER-Formel beschrieben werden kann. Voraussetzung für scharfe Compoundresonanzen ist lange Lebensdauer des Compoundzustandes. Das bedeutet aber, daß der Aufbruchszerfall eines Compoundzustandes des Gesamtsystems immer mit den ohnehin vorhandenen Strukturen des Drei-Cluster-Aufbruchs in Konkurrenz stehen wird. Von daher ist es zu erwarten, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt bei der Resonanzenergie einer wesentlichen Dreikörperresonanz auch durch die

Struktur der Final State- und der Quasi Free Peaks geprägt wird (Interferenzen) und daß es den schönen Fall einer isolierten BREIT-WIGNER-Resonanz (wie im Zweiclusterfall) im Dreiclusterfall nicht mehr geben wird.

Im nächsten Paragraphen wird vom aktuellen Stand der Forschung berichtet. Am Ende des Kapitels III wird eine detaillierte Untersuchung der Resonanzverhältnisse im Dreiclustersystem gegeben. Mit besonderem Nachdruck werden die Schwierigkeiten, eine wesentliche Dreikörperresonanz zu beschreiben und experimentell nachzuweisen, erörtert.

II.4. Drei-Körper-Resonanzen - aktueller Stand der Forschung

Obschon seit knapp einem Jahrzehnt im Brennpunkt des Interesses, ist die theoretische Untersuchung der Drei-Körper-Resonanzen ein noch schwach ausgearbeiteter Zweig des Drei-Körper-Problems, wenn man sie beispielsweise mit dem Studium der Bindungszustände vergleicht. Die Ursache für diesen Umstand liegt einerseits in den beträchtlichen mathematischen Schwierigkeiten bei Lösung der FADDEEV Gleichungen oder ähnlicher Lösungstechniken und andererseits in dem Fehlen eindeutiger experimenteller Hinweise auf die Existenz von Drei-Teilchen-Resonanzen in nichtrelativistischen Systemen. Die experimentelle Situation der Drei-Teilchen-Resonanzen /18-25/ kann in wenigen Worten durch die Tatsache charakterisiert werden, daß, wenn überhaupt eine solche Resonanz vorliegt, sie sehr kleine Wirkungsquerschnitte liefert und vermutlich große Resonanzweiten besitzt. Bis dato, trotz vielfältiger Versuche, die wir nachstehend kurz erläutern werden, ist es schwierig gewesen, die experimentellen Ergebnisse vom theoretischen Standpunkt aus zu verstehen: Es ist immer noch nicht ganz klar unter welchen Bedingungen wesentliche Drei-Körper-Resonanzen in Erscheinung treten können und wie sensitiv ihre physikalische Charakteristika von den Parametern der Zwei-Körper-Wechselwirkungen abhängen.
Drei-Körper-Resonanzen sind auch in der Elementarteilchenphysik vom größten Interesse. Dort können Nukleonen als Drei-Quark-Cluster angesehen werden und folglich hat man bei Drei-Nukleon-Resonanzen (NNN) ein Neun-Quark-System zu betrachten. Es wurde wiederholt darauf hingewiesen, daß die SCHMID'sche Clustertheorie dergestalt formuliert ist, daß sie auch im Fall der Quarks ihre Gültigkeit behält /4/.
Es ist unser Anliegen darzustellen, daß die Clustertheorie von SCHMID besonders dazu geeignet ist, Drei-Körper-Resonanzen zu behandeln. Doch zunächst möchten wir diesen theoretischen Ansatz im Lichte der bisher stattgehabten Untersuchungen betrachten. Die theoretischen Methoden, die bisher auf diesem Feld Anwendung gefunden haben, kann man in drei Gruppen einteilen:

1) Die erste Gruppe von Methoden geht von der Schrödingergleichung aus und bedient sich verschiedener Variationsmethoden.

2) Die zweite Gruppe basiert auf den Integralgleichungsformalismen von FADDEEV /26/, KARLSON-ZEIGER /27/ oder ALT-GRASSBERGER-SANDHAS /28/.

3) Die dritte Gruppe bündelt gewissermaßen diese Methoden und bedient sich ihrer im Hinblick auf ihre Unitaritäts- und Analytizitätseigenschaften hin.

Wir erläutern im folgenden diese Methoden in der oben angegebenen Ordnung.

1) Hier ist zunächst die von BALADYAN und SIMONOV /29/ auf drei Körper erweiterte Hilbert-Schmidt Methode zu nennen. Darin ist die Drei-Körper-Resonanz durch die Lösung der entsprechenden Schrödingergleichung mit einem Potential (= Summe der Zwei-Körperpotential) definiert, das mit einer Konstanten - den Hilbert-Schmidt Eigenwert $\lambda_n(E)$ - multipliziert ist. Die Resonanzenergie findet man aus der Bedingung $\lambda_n(E) = 1$. Hier hat das Wort Resonanzenergie eine allgemeine Bedeutung als Pol der S-Matrix. Für eine physikalische Resonanz als schnell zerfallender Zustand fordert man, daß der Imaginärteil des S-Matrixpoles E klein sein soll.
   Eine etwas modifizierte Methode von BALADYAN und BIRGER /30/ bestand darin, ein über ein Variationsverfahren ermitteltes, gekoppeltes System von differentiellen Gleichungen für die Wellen-Funktion, die man zuvor in hypersphärische Funktionen entwickelt hat, zu lösen. Diese Methode zeigte beispielsweise, daß für Kastenpotentiale keine Resonanzen im NNN-System zu erwarten sind. VOLOSHYN UND OKUM /31/ dehnten diese Methode auf Viel-Quark-Systeme aus.

2) Hier begegnen wir einer Vielfalt von Methoden. Die erste hat sich zum Ziel gesetzt, die Eigenwerte $\mu_n(E)$ und Eigenfunktionen der FADDEEV oder FADDEEVähnlichen Integralgleichungskerne zu berechnen und die Drei-Körper-Resonanzen aus den Bedingungen $\mu_n(E)=1$, $ReE > 0$ und ImE klein zu bestimmen. Die erheblichen mathematischen Schwierigkeiten bestehen in dem Umstand, daß bei positiver totaler Energie bewegliche Singularitäten vom logarithmischen Typ in den Integralgleichungskernen in Erscheinung treten. Wurden auch verschiedene Verfahren zur Lösung dieses Problems wie die von HETHERINGTON /32/, SOHRE und ZIEGELMANN /33/ oder BELYAEV und EFIMOV /34/ entwickelt, so wurden sie nur bei der Lösung der Streuprobleme herangezogen. Erst neulich haben BELYAEV und MÖLLER /35/ diese Methoden, allerdings für den einfachsten Fall von drei Teilchen ohne Spin, die über separable Yamaguchi Potentiale vom Rang Eins miteinander wechselwirken,

angewandt. Glöckle /36/ hat in ähnlichen Rechnungen ein modifiziertes System von Lippmann-Schwinger Gleichungen herangezogen und sie für den Fall der Gaußpotentiale untersucht. Man kann auch im Rahmen der Off-Shell-Integralgleichungen die inhomogenen FADDEEV Gleichungen beispielsweise für die Drei-Teilchen-Übergangsamplitude lösen und ihr Resonanzverhalten als Funktion der Energie studieren. BEREGI,LOVAS und REVAI /37/ haben als erste ein einfaches Modell, das aus zwei Teilchen und einem Potential (entspricht einem dritten Teilchen mit unendlich großer Masse) mit zwei Bindungszuständen bestand, vorgeschlagen, wobei sie die vorstehend genannte Methode benutzt haben. Sie konnten jedoch keine quantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Daten herstellen. Dabei hatte man Systeme im Auge, die aus einem schweren Nuklearkern und aus zwei leichten Teilchen (n,p) bestanden.
Eine realistischere Rechnung für ein allgemeines Drei-Teilchen-Modell wurde von SIMONOV und BALDYAN /38,39/ durchgeführt.
Als weitere Methoden seien hier zum Schluß die N/D-Methode von BALADYAN und POLIKARPOV /40/ sowie die Boundary-Condition-Methode von SKORNYAKOV,TER-MARTIROSJAN und KIM und TUBIS /41/ genannt.

3) Die Methoden, die auf den Analytizitäts- und Unitaritätseigenschaften fußen, waren unter den ersten, mit deren Hilfe man das Drei-Körper-Resonanz-Problem in Angriff nahm. Größte Aufmerksamkeit verdient hier die von SIMONOV entwickelte Unitary-Condition-Methode, derer ausführliche Darstellung nebst einer Übersicht über verwandte Methoden man in Referenz /42/ findet.

Von allen Methoden kann man sagen, daß sie,trotz der Aufhellung wichtiger Zusammenhänge der Drei-Körper- und Zwei-Körper-Parameter und vielversprechender Entwicklungsmöglichkeiten,über das Stadium eines Modells noch nicht hinausgetreten sind. Diesen Anspruch aber erhebt die in der vorliegenden Arbeit diskutierte Methode, dessen ungeachtet, daß noch keine numerischen Ergebnisse vorliegen, weil entsprechende FADDEEV-Rechenprogramme in Tübingen noch nicht angelaufen sind. Diese Methode ist zwischen der ersten und der zweiten Gruppe angesiedelt. Sie benutzt Resonanzpotentiale, die auf mikroskopischer Ebene über die Schrödingergleichung hergeleitet sind,

und behandelt sie im Rahmen eines FADDEEV-Formalismus. Was benötigt wird, sind nur FADDEEV-Streulösungen mit verschiedenen Anfangsbedingungen und zu Energien im Bereich der Resonanzenergie. Die Einfachheit dieses Modells beruht hauptsächlich auf der Lösbarkeit dse Asymptotikproblems des Drei-Teilchen-Greensoperators und der Separabilität (separabel im Drei-Teilchen-Raum) der Resonanzwechselwirkung.

III. Kinematik des Dreikörperproblems mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzphänomene

In diesem Kapitel entwickeln wir ein kinematisches Dreiteilchenmodell, das sich bei der Diskussion der im Paragraph III.4 erwähnten Möglichkeiten der Überlagerung der verschiedenen Aufbruchsmechanismen mit einer wesentlichen Dreikörperresonanz als besonders nützlich erweisen wird.
Im Falle von Zweiclusterstreuung mit nur einem Kanal sind die Verhältnisse relativ einfach: Die Resonanz kann durch eine Breit-Wigner-Formel beschrieben werden. Bei zwei und mehr Zweikörperkanälen üben die einzelnen Kanäle gegenseitig einen Einfluß aufeinander aus, und die Verhältnisse werden kompliziert.[1)]

Der Dreikörperaufbruch entspricht in gewisser Weise dem Zerfall in ein Kontinuum von Kanälen. Diese Eigenschaft des Dreikörperaufbruchs wird in § III.5 diskutiert und im Kapitel IV (§ IV.2) quantitativ in der Resonanzamplitude des Aufbruchs abgeleitet. Das Kontinuum der Kanäle kann in verschiedener Weise parametrisiert werden, beispielsweise durch die "Scheinwerferrichtung" des Leuchtturmeffektes, den wir in § III.5 besprechen werden.
Der Aufbruchswirkungsquerschnitt hat in allen bekannten und interessanten Fällen "Struktur": Es gibt einen Final State Peak und einen Quasi Free Scattering Peak, und das bei allen Energien. Wenn es noch eine bestimmte Subsystemresonanz gibt, dann tritt auch sie bei allen Energien auf, die höher sind als Resonanzenergie bei verschwindender Spektatorenergie.
Die Darstellung der experimentellen Untersuchungen erfolgte bisher unter dem Gesichtspunkt dominant auftretender Reaktionsmechanismen: der Final State Interaction oder der Endzustandswechselwirkung und der quasifreien Streuung zweier der drei Reaktionspartner.

Die Final State Interaction eignet sich besonders für die Analyse der niederenergetischen Zweikörperstreuung. Die Untersuchung der kinematischen Region der quasifreien Streuung erweist sich als Basis für die Analyse der Zweikörperstreuung bei höheren Energien und gibt die Möglichkeit zur Bestimmung von off-Shell Effekten.

---

1) Siehe entsprechende Phasenverläufe in Ref./1/, S. 168-175

Beide Reaktionsmechanismen, Final State Interaction und Quasi Free Scattering, sind Zweistufenprozesse und betreffen im Grunde Aspekte der Zweikörperwechselwirkung. Eine wesentlich neue Information über das Dreikörpersystem könnte die wesentliche Dreikörperresonanz oder Sudden-Breakup Resonanz liefern.
Das Studium einer wesentlichen Dreikörperresonanz ist schwierig, weil der Zerfall eines Compoundzustandes des Gesamtsystems in drei Kernfragmente immer mit den ohnehin vorhandenen und dominanten Strukturen der Final State Interaction, Quasi Free Scattering und anderen in Konkurrenz treten muß. Diese Strukturen lassen sich veranschaulichen über das Vorhandensein vorgeformter Rinnen im Potentialgebirge, die den Aufbruchsstrom von Teilchen in ihren Flußbetten kanalisieren. Aber selbst wenn wir die Existenz einer scharfen, von allen anderen Resonanztypen unterschiedenen Resonanz unterstellen, so wird sie durch den wechselseitigen Einfluß des Kontinuums der offenen Dreikörperkanäle eine Gestalt annehmen, die nicht ohne weiteres dem üblichen Resonanzverhalten entsprechen muß.

Die kinematischen Verhältnisse eines Drei-Körper-Systems sind in mehreren Arbeiten genau untersucht worden. Grundsätzliche Beziehungen wurden im nichtrelativistischen Fall von OHLSEN /43/ und im relativistischen Fall von D'ANGELO et al. /44/ abgeleitet. Die Einführung von Relativkoordinaten der Orts- und Impulsdarstellung ist nicht einheitlich; die Freiheit der Definitionsmöglichkeit macht man sich zunutze, um eine geeignete Anpassung an das zu untersuchende Problem zu erzielen. Eine brauchbare Diskussion der Drei-Körper-Kinematik findet man auch bei KLUGE /45/ im Rahmen der Untersuchung der Final State- und Quasi Free-Reaktionen. Vom gruppentheoretischen Standpunkt aus findet man eine Diskussion der kinematischen Tensoren und der verallgemeinerten Dalitz-Diagramme in der Dissertation von KRAMER /46/. Die in den erwähnten Arbeiten abgeleiteten kinematischen Beziehungen eines Drei-Körper-Systems sind so kompliziert, daß sie sich nur ihrer mathematischen Struktur nach herleiten und nur in den seltensten Fällen anschaulich fassen lassen. Es braucht aber nicht betont zu werden, daß es physikalisch von Vorteil ist, wenn die unmittelbare Anschauung erhalten werden kann, zumal die Verhältnisse in einem Drei-Körper-System äußerst komplex sein können, beispielsweise, wenn Break-Up Resonanzen mit Subsystem- oder Final State-Resonanzen interferieren

können. Es wird im folgenden gezeigt, daß kinematische Beziehungen eines Drei-Körper-Systems sich besonders anschaulich im Geschwindigkeitsraum darstellen lassen. Das Drei-Körper-System ist bei jeder Energie und jeder Energieverteilung auf die Streupartner durch den sogenannten "Drei-Teilchen-Schnabel" beschrieben. Darüber hinaus ist diese Darstellungsweise besonders geeignet, die kinematischen Verhältnisse aller Resonanzphänomene in Drei-Teilchen-Systemen zu diskutieren. Da die Darstellung dieser kinematischen Verhältnisse auch für Zwei-Teilchen-Systeme in der Literatur nicht vorhanden ist, möchten wir zunächst in den ersten zwei Paragraphen dieses Kapitels das Zwei-Körper-System

a) im Falle der elastischen Streuung und

b) im Falle der inelastischen Streuung behandeln. In § III.3 widmen wir uns dann dem Drei-Körper-Problem, um schließlich in den zwei letzten Paragraphen die Anwendung dieser Darstellung auf Drei-Körper-Resonanzphänomene zu erläutern. Hier wird unter anderem der "Leuchtturmeffekt" im Fall einer Subsystemresonanz unsere Aufmerksamkeit finden.

III.1. Elastische Zwei-Teilchen-Streuung im Geschwindigkeitsraum

Im Zwei-Teilchen-System gelten folgende Erhaltungssätze:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad \text{(III.1.1)}$$

$$\frac{m_1}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^{\,2} = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1'^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2'^{\,2} \qquad \text{(III.1.2)}$$

Hier bezeichnen die Indizes 1 und 2 die Teilchen, $\vec{v}_{1/2}$ die Geschwindigkeit vor, $\vec{v}'_{1/2}$ die Geschwindigkeit nach dem Stoß. Für die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ und für die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{V}$ erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{und} \quad \vec{v}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' \qquad \text{(III.1.3)}$$

$$\vec{V} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/(m_1+m_2) \quad \text{und} \quad \vec{V}' = (m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2')/(m_1+m_2) \qquad \text{(III.1.4)}$$

Für die so definierten Größen gelten folgende Relationen:

$$\vec{V} = \vec{V}' \quad \text{und} \quad |\vec{v}| = |\vec{v}'| \qquad \text{(III.1.5)}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \qquad \text{(III.1.6)}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \qquad \text{(III.1.7)}$$

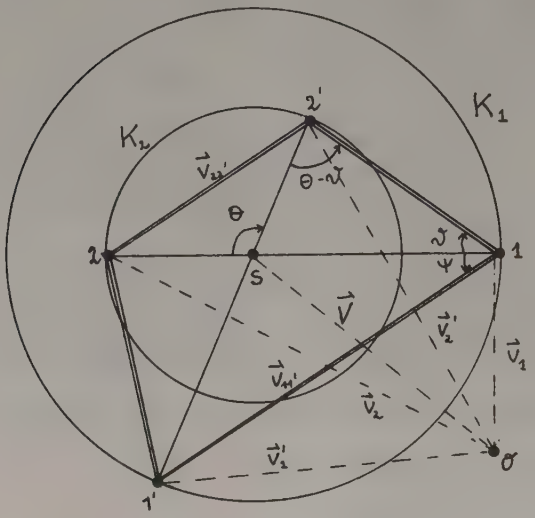
Analoge Beziehungen gelten für die Größen $\vec{v}'_1$ und $\vec{v}'_2$.

Behauptung:

Der elastische Stoß wird im Geschwindigkeitsraum durch ein gleichschenkliges Trapez gekennzeichnet. Mit seiner Hilfe kann man durch Anwendung elementar-geometrischer Sätze alle wesentlichen kinematischen Eigenschaften der Zwei-Teilchen-Streuung ablesen. Der Beweis wird per constructionem erbracht, wie aus der Figur 2 ersichtlich. Im Laborsystem wird das Teilchen 1 ($1'$) unter dem Winkel Ψ, das Teilchen 2 ($2'$) unter dem Winkel ϑ gestreut. Der Streuwinkel im Schwerpunktsystem ist mit θ bezeichnet. Der Buchstabe S steht stellvertretend für den Schwerpunkt. Es ist leicht aus den folgenden Gleichungen zu erkennen, daß die Geschwindigkeiten $\vec{v}_{22'}$ und $\vec{v}_{11'}$ pararell sind,denn es gilt

$$\vec{V}_{22}' = \vec{V}_2' - \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}' - \vec{v})$$

$$\vec{V}_{11}' = \vec{V}_1' - \vec{V}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}' - \vec{v}) \qquad \text{(III.1.8)}$$



Figur 2.

Im Schwerpunktsystem ist die mögliche Lage der Punkte 1' und 2' durch die entsprechenden Kreise K_1 und K_2 beschrieben.[2] Nehmen wir an, daß Teilchen 2 vor dem Stoß in Ruhe war, dann lesen wir aus der Figur 2 sofort ab, daß

$$2\psi + \theta = \pi \qquad \text{(III.1.9)}$$

Betrachtet man jetzt das Dreieck S-2'-1, so erhält man aus dem Sinussatz:

$$\frac{\sin(\theta - \vartheta)}{m_2} = \frac{\sin\vartheta}{m_1} \qquad \text{(III.1.10)}$$

und daraus

$$\tan\vartheta = \sin\theta/(m_2/m_1 + \cos\theta) \qquad \text{(III.1.11)}$$

[2] Fig.2 liegt in der Streuebene und gilt für einen bestimmten Azimuthwinkel .Die freie Variation von macht die Kreise K_1 und K_2 zu Kugeln.

Gleichung (III.1.11) ist aber bereits die bekannte Transformation zwischen den Winkeln im Schwerpunkt- und im Laborsystem.

III.2. Inelastische Zwei-Teilchen-Streuung

Gegenüber den Erhaltungssätzen (III.1.1) und (III.1.2) muß im Falle eines inelastischen Stoßes der Erhaltungssatz folgende Gestalt annehmen:

$$\tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2} = \tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,\prime} + \tfrac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,\prime} + Q \,, \qquad \text{(III.2.1)}$$

wobei $Q>0$. Die letzte Gleichung können wir noch umformen und erhalten

$$E^{s}_{tot} + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{V}^{2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}^{\,\prime 2} + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{V}^{\prime 2} + Q \,. \qquad \text{(III.2.2)}$$

Die gesamte Energie im Schwerpunktsystem E^{s}_{tot} ist gegeben durch:

$$E^{s}_{tot} = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}^{\,2} \,. \qquad \text{(III.2.3)}$$

Es gilt $\quad |\vec{v}^{\,\prime}| = \left(\vec{v}^{\,2} - 2\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,Q\right)^{1/2} .$

Mit denselben Definitionen wie im letzten Paragraphen findet man, daß $\vec{v}_{11'}$ paralell zu $\vec{v}_{22'}$ ist. Damit können wir folgende Behauptung formulieren:

Behauptung:

Die inelastische Streuung zweier Körper ist gekennzeichnet durch ein nichtgleichschenkliges Trapez, aus dessen Geometrie die kinematischen Eigenschaften abgeleitet werden können. Die zu Figur 2 analoge Figur 3 verdeutlicht den Sachverhalt. Die Bezeichnungen korrespondieren zu denjenigen der Figur 2.

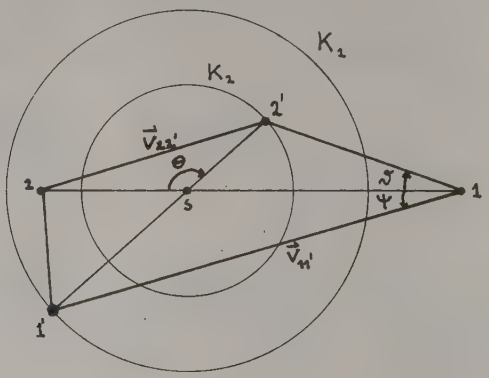


Fig.3

Der Sinussatz liefert in diesem Fall:

$$\frac{\sin(\theta-\vartheta)}{\frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}|} = \frac{\sin\vartheta}{\frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}'|} \quad . \tag{III.2.4}$$

Daraus erhält man sofort

$$\tan\vartheta = \sin\theta / \left(m_2/m_1\,(1 - Q/E^s_{tot})^{-1/2} + \cos\theta\right) . \tag{III.2.5}$$

Aus Gleichung (III.2.5) sieht man, da folgende Bedingung

$$E^s_{tot} > Q \tag{III.2.6}$$

gelten muß, damit eine Reaktion überhaupt stattfinden kann. Damit sind alle Möglichkeiten der Zwei-Teilchen-Reaktionen ausgeschöpft. Das Teilchen 1' kann alle Positionen auf dem Kreis K_1 annehmen. Jeder Position des Teilchens 1' auf dem Kreis K_1 entspricht eindeutig (diametral entgegengesetzt) die Lage des Teilchens 2' auf dem Kreis K_2. Man kann sich vorstellen, daß die Strecke $\overline{1'\,2'}$ eine Stange ist, die im Schwerpunkt S drehbar gelagert ist.

Und noch ein weiteres anschauliches Bild führen wir ein, das später im Drei-Teilchen-Fall vom Nutzen sein wird. Wir stellen uns vor, daß die Strecken $\overline{12}$ und $\overline{1'\,2'}$ Rohrstücke seien, die im Punkte S dergestalt verbunden sind, daß ein Durchfluß einer Flüssigkeit möglich ist. Die Menge der Flüssigkeit, die in das Rohrstück $\overline{12}$ hineingepumpt wird, sei proportional zu der Strahlintensität. Es ist klar, daß in jeweiliger Stellung des Rohrstückes $\overline{1'\,2'}$ aus demselben eine kleinere Menge Flüssigkeit herausfließt als die Menge an Flüssigkeit, die wir in das Rohr $\overline{12}$ hineingepumpt haben. Das Verhältnis dieser Mengen entspricht dann dem Quadrat der Übergangsamplitude. Erst wenn wir die Wassermengen in allen Stellungen des Rohrstückes $\overline{1'\,2'}$ integrieren, erhalten wir die Gleichheit der hinaus- und hineingeflossenen Wassermengen und somit Stromerhaltung.

III.3. Drei-Teilchen-Streuung

Hier können wir grundsätzlich zwei Anfangssituationen unterscheiden :

1) Vor der Streuung sind alle Streupartner frei,
2) vor der Streuung bilden zwei Streupartner ein gebundenes Subsystem.

Hinfort untersuchen wir den Fall 2). Der Fall 1) findet selten Anwendung und wird höchstens in der Untersuchung der Dynamik der Gase berücksichtigt. Im Drei-Teilchen-Fall gelten folgende Erhaltungssätze:

$$m_1 \vec{v}_1 + M_{23} \vec{v}_{23} = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + m_3 \vec{v}_3' \qquad \text{(III.3.1)}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} M_{23} \vec{v}_{23}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_3 \vec{v}_3'^{\,2} + Q \,. \qquad \text{(III.3.2)}$$

Die neuen Größen M_{23} und $\vec{v}_{23}$ werden wie folgt erklärt:

$$M_{23} = m_2 + m_3 \quad , \quad \vec{v}_{23} = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \quad , \quad Q > 0 \,. \qquad \text{(III.3.3)}$$

Wir nennen eine Drei-Teilchen-Streuung quasi-elastisch, wenn das Drei-Teilchen-System keine Bindungszustände hat. In diesem Fall ist Q die Bindungsenergie des Subsystems aus Teilchen 2 und 3.

Gleichung (III.3.2) können wir umschreiben und erhalten

$$\tfrac{1}{2} M \vec{V}^2 + \tfrac{1}{2} \mu_{2-3} \vec{v}_{2-3}^{\,2} + \tfrac{1}{2} \mu_{1-23} \vec{v}_{1-23}^{\,2} = \tfrac{1}{2} M \vec{V}^2 + \tfrac{1}{2} \mu_{2-3} \vec{v}_{2-3}'^{\,2} + \tfrac{1}{2} \mu_{1-23} \vec{v}_{1-23}'^{\,2} + Q \,, \qquad \text{(III.3.4)}$$

wenn wir folgende Definitionen treffen:

$$\mu_{1-23} = m_1 (m_2 + m_3) / M \quad , \quad \mu_{2-3} = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

$$\vec{V} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3) / M$$

$$\vec{v}_{1-23} = \vec{v}_1 - (m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3) / M_{23} \quad , \quad \vec{v}_{2-3} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

$$\tfrac{1}{2}\mu_{1-23}\vec{V}^{2}_{1-23} = E^{s}_{tot}\,. \qquad \text{(III.3.5)}$$

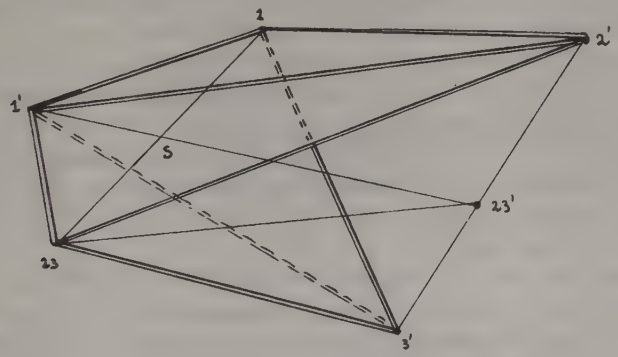
Für den uns interessierenden und eingangs erwähnten Fall 2) gilt

$$\vec{V}_{2-3} = 0\,. \qquad \text{(III.3.6)}$$

Mit Gleichung (III.3.6) erhalten wir aus (III.3.4)

$$\tfrac{1}{2}\mu_{1-23}\vec{V}^{2}_{1-23} = \tfrac{1}{2}\mu_{1-23}\vec{V}'^{2}_{1-23} + \tfrac{1}{2}\mu_{2-3}\vec{V}'^{2}_{2-3} + Q\,. \qquad \text{(III.3.7)}$$

Analog zu den Überlegungen in den vorangegangenen Paragraphen findet man aus dem Impulserhaltungssatz (III.3.1), daß $(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)$ parallell zu $(\vec{v}_{1-23} - \vec{v}'_{1-23})$ ist. Dem Trapez im Zwei-Teilchen-Fall entspricht der "Drei-Teilchen-Schnabel" im Drei-Teilchen-Fall. Der "Drei-Teilche-Schnabel" ist qualitativ in der Figur 4 dargestellt.



Figur 4. Das nichtgleichschenklige Trapez 1,1',23,23' ist mit einfachen Linien eingezeichnet. Mit doppelten Linien ist der "Drei-Teilchen-Schnabel" eingezeichnet. Zu weiteren Erkärungen siehe Text.

Dieser "Drei-Teilchen-Schnabel" gibt ein Anschaungsmittel , die Drei-Teilchen-Kinematik in bildhafter Weise zu überschauen und in einfacher Weise die komplizierten Formeln für die wechselseitige Transformation des Labor- und Schwerpunktssystems ineinander abzuleiten. Im folgenden werden diese Beziehungen aus den Bewegungen des Schnabels abgeleitet.
Wir nehmen an, daß die experimentellen Ausgangssituation durch

einen ruhenden Targetkern 23 gegeben ist. Dann liegen die Punkte 23,S und 1 fest; in diesen Punkten ist der Schnabel sozusagen fixiert. Für die in der Figur 4 auftretenden Strecken können wir folgende Ungleichung ableiten:

$$\overline{1'(23')} + \overline{3'2'} = \overline{1'S} + \overline{S(23')} + \overline{2'(23')} + \overline{3'(23')} = \text{const} < \overline{1(23)} . \qquad \text{(III.3.8)}$$

Ferner sind folgende Streckenverhältnisse konstant:

$$\frac{\overline{1'S}}{\overline{S(23')}} = \text{const} \quad , \quad \frac{\overline{2'(23')}}{\overline{3'(23')}} = \text{const} \quad , \qquad \text{(III.3.9)}$$

und hängen einzig von den Massenverhältnissen ab. Die Punkte 1'und 23'bewegen sich auf konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt in S (in völliger Analogie zum Zwei-Teilchen-Fall); die Punkte 2' und 3' bewegen sich auf konzentrischen Kugeloberflächen mit dem Mittelpunkt in 23' (siehe auch dazu Figur 5 auf Seite 36). Das eigentliche bewegliche Gestänge besteht aus den Rohrstücken 1'(23') und 2'3', die in S bzw. in (23) drehbar gelagert sind. Der Strecke 1'(23') entspricht die Länge,der Strecke 2'3' die Öffnungsweite des Schnabels. Die Beziehung (III.3.8) lehrt uns, daß die Vergrößerung der Länge nur auf Kosten der Öffnungsweite und umgekehrt bewerkstelligt werden kann. Durch dieses Spiel des Gestänges und die Bewegung auf den konzentrischen Kreisen bzw. Kugeln ist die ganze Drei-Teilchen-Dynamik erfasst.

Wir nehmen an, daß im Laborsystem der Vektor $\overrightarrow{(23)\,1}$ die z-Achse darstellt, der Ursprung des Koordinatensystem (x,y,z) im Punkt (23) liegt und die Lage des Koordinatensystems durch die Vorgabe der Winkel, unter welchen die gesteuten Teilchen beobachtet werden, festgelegt ist.Die Winkel werden folgendermaßen definiert:

1) für das Teilchen 1' durch $\Psi_1, \varphi_1 = 0$ (dadurch ist das Koordinatensystem (x,y,z) festgelegt),
2) für das Teilchen 2' durch Ψ_2, φ_2 ,
3) für das Teilchen 3' durch Ψ_3, φ_3 , (III.3.10)
4) für den Schwerpunkt des Subsystems 23' durch $\Psi_{23}, \varphi_{23} = 0$.

Das bedeutet, daß das Trapez 1,(23),1',(23') in der xz-Ebene liegt. Die Verhältnisse sind in der Figur 6 dargestellt.
Die einzelnen Größen in der Figur 6 sind folgendermaßen definiert:

$$\vec{r}_{23} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_1/M)\,|\vec{v}_{1-23}| \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_{23}/M)\,|\vec{v}_{1-23}| \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1' = \begin{pmatrix} \sin\psi_1 \\ 0 \\ \cos\psi_1 \end{pmatrix} |\vec{v}_1'|, \qquad \vec{v}_2' = \begin{pmatrix} \sin\psi_2 \cos\varphi_2 \\ \sin\psi_2 \sin\varphi_2 \\ \cos\psi_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.3.11)}$$

$$\vec{v}_{23}' = \begin{pmatrix} \sin\psi_{23} \\ 0 \\ \cos\psi_{23} \end{pmatrix} |\vec{v}_{2-3}'|, \qquad \vec{v}_3' = \begin{pmatrix} \sin\psi_3 \cos\varphi_3 \\ \sin\psi_3 \sin\varphi_3 \\ \cos\psi_3 \end{pmatrix}$$

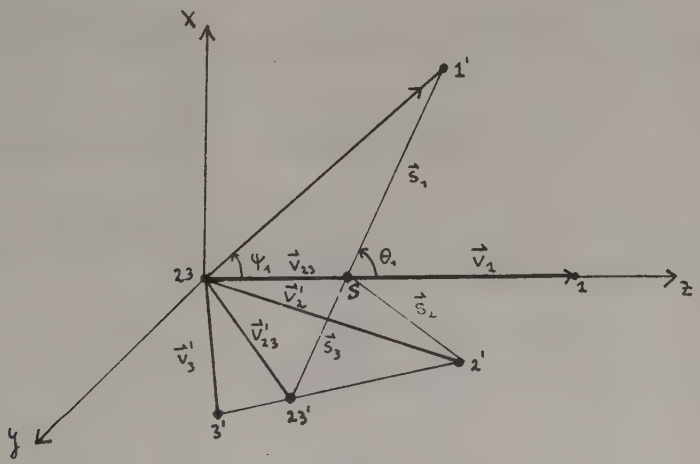


Fig.6

Ferner definieren wir das Schwerpunktsystem (x_s, y_s, z_s), das aus der Verschiebung des Koordinatensystems (x,y,z) durch den Vektor $\vec{v}_{23}$ hervorgeht. Im Schwerpunktystem werden die die Teilchen unter folgenden Winkeln beobachtet:

1) Teilchen 1 unter den Winkeln $\theta_1, \chi_1 = 0$,
2) Teilchen 2 unter den Winkeln θ_2, χ_2, (III.3.12)
3) Teilchen 3 unter den Winkeln θ_3, χ_3,
4) Der Schwerpunkt des Subsystems (23') unter den Winkeln $\theta_4 = \overline{\pi} - \theta_1, \chi_4 = 0$

Die einzelnen Größen sind in dem neuen System (siehe Figur 6) wie folgt definiert:

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} \sin\Theta_1 \\ 0 \\ \cos\Theta_1 \end{pmatrix} \frac{M_{23}}{M} \left|\vec{V}'_{1-23}\right| \quad , \qquad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} \sin\Theta_2 \cos\chi_2 \\ \sin\Theta_2 \sin\chi_2 \\ \cos\Theta_2 \end{pmatrix} \left|\vec{V}'_2 - \vec{V}\right|$$

(III.3.13)

$$\vec{S}_{23} = -\begin{pmatrix} \sin\Theta_1 \\ 0 \\ \cos\Theta_1 \end{pmatrix} \frac{m_1}{M} \quad , \qquad \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} \sin\Theta_3 \cos\chi_3 \\ \sin\Theta_3 \sin\chi_3 \\ \cos\Theta_3 \end{pmatrix} \left|\vec{V}'_3 - \vec{V}\right| ,$$

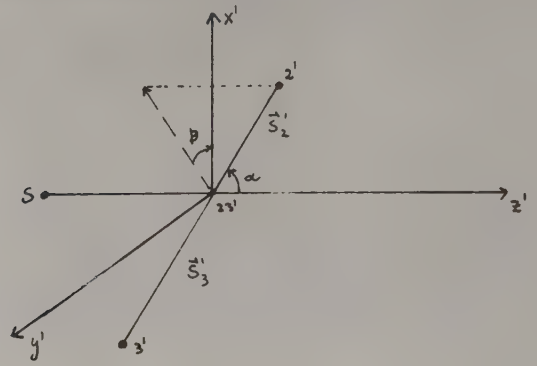
wobei

$$\left|\vec{S}_1 - \vec{S}_{23}\right| = \left|\vec{V}'_{1-23}\right| = \left(v_{1-23} - \left[\frac{\mu_{2-3}}{\mu_{1-23}} v'^2_{2-3} + \frac{2}{\mu_{1-23}} Q\right]^{1/2}\right). \qquad \text{(III.3.14)}$$

Der Zusammenhang der Winkel Ψ_1 und Θ_1 ist gegeben durch folgende Gleichung

$$\tan\Psi_1 = \sin\Theta_1 \Big/ \left(m_1/M_{23}\left[1 - Q/E^S_{tot}\right]^{-\frac{1}{2}} + \cos\Theta_1\right). \qquad \text{(III.3.15)}$$

Als drittes Koordinatensystem führen wir ein lokales Koordinaten-System (x',y',z') ein , das seinen Ursprung im Punkt (23') hat und in der Figur 7 veranschaulicht wird.



Figur 7 .

$$\vec{S}'_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \frac{m_3}{M_{23}} \left|\vec{V}'_{2-3}\right| \quad , \quad \vec{S}'_3 = -\begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \frac{m_2}{M_{23}} \left|\vec{V}'_{2-3}\right| , \qquad \text{(III.3.16)}$$

wobei $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ und $\beta \in [0, 2\pi)$.

Die Transformation vom Koordinatensystem (x_s, y_s, z_s) in das Koordinatensystem (x', y', z') wird durch das Hintereinanderschalten folgender Abbildungen vermittelt:

i) Drehung D des Koordinatensystems (x_s, y_s, z_s) längs der y_s-Achse um den Winkel $(\pi - \theta_1)$.

ii) Dann wird das gedrehte System mit dem Vektor $\vec{s}_{23}$ translatiert (Translation T).

Die ganze Transformation lautet dann $(T \circ D)$, und die Umkehrtransformation $(D^{-1} \circ T^{-1})$. Hier sind die Definitionen der Abbildungen:

$$D\vec{a}_s = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \vec{a}_s \quad , \quad D^{-1}(\vec{a}'_s - \vec{s}_{23}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} (\vec{a}'_s - \vec{s}_{23})$$

$$T(D\vec{a}_s) = D\vec{a}_s + \vec{s}_{23} = \vec{a}'_s \quad , \quad T^{-1}(\vec{a}'_s) = \vec{a}'_s - \vec{s}_{23} \quad , \qquad \text{(III.3.17)}$$

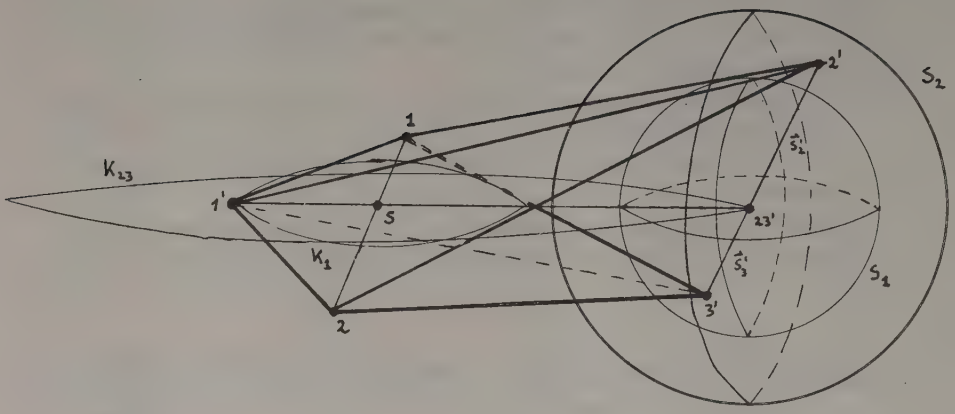
wobei

$$\vec{s}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{m_1}{M} |\vec{v}'_{1-23}|$$

im Koordinatensystem (x', y', z'). Es bleibt uns noch das Koordinaten-System (x, y, z) mit dem Koordinatensystem (x_s, y_s, z_s) zu verknüpfen. Dies geschieht durch die Translation P, die folgendermaßen definiert ist:

$$P\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}_{23} = \vec{x}_s \quad \text{und} \quad P^{-1}\vec{x}_s = \vec{x}_s - \vec{v}_{23} \, . \qquad \text{(III.3.18)}$$

Damit haben wir alle mathematischen Teilstücke parat, um alle Systeme beliebig ineinander zu transformieren und die Bewegungen des "Drei-Teilchen-Schnabels" in allen drei Systemen zu beschreiben. In der Figur 5 sind alle Bewegungsfreiheiten des Schnabels dargestellt. Die Punkte 1' und 23' bewegen sich auf zwei konzentrischen Kreisen K_1 und K_{23}, und sie liegen diametral zueinander bezüglich des Schwerpunktes S. Die Punkte 2' und 3' haben ihren Ort auf den konzentrischen Sphären S_2 und S_3. Sie liegen ebenfalls diametral zueinander allerdings bezüglich des Schwerpunktes des Subsystems (23'). Aus der Gleichung (III.3.8) folgt, daß wir in bestimmten Grenzen die Länge von $\overline{1'(23')}$ verändern können; vergrößern wir sie , so werden



Figur 5.

die Teilstücke $\overline{1'S}$ und $\overline{S(23')}$ im Verhältnis $m_1:M_{23}$ vergrößert, die Kreise K_1 und K_{23} schwellen an, gleichzeitig werden in demselben Maß die Strecke $\overline{2'3'}$ und entsprechend die Teilstrecken $\overline{2'(23')}$ und $\overline{3'(23')}$ im Verhältnis $m_3:m_2$ kleiner, die Sphären S_1 und S_2 schrumpfen. Mit anderen Worten je länger der Schnabel wird, desto mehr schließt er sich. Haben wir die Lage des gestreuten Teilchens 1' auf den Kreis K_1 fixiert, wozu wir drei Angaben brauchen:Die Länge von 1'S, den Winkel θ_1 oder Ψ_1 und den Winkel φ_1, den wir Null gesetzt haben, so brauchen wir noch zwei Winkelangaben α und β im Koordinatensystem (x',y',z'), um den "Drei-Teilchen-Schnabel" vollständig zu fixieren. Das entspricht der bekannten Tatsache, daß die kinematischen Verhältnisse eines Drei-Körper-Systems durch Angabe von fünf verschiedenen Größen vollständig festgelegt sind. Die Frage, wie wir zum Laborsystem zurückkommen, in dem die Auswahl der Winkel, unter welchen man die Teilchen nachweisen will, stattfindet, beantworten wir am Beispiel vom Teilchen 2', und unterstellen gleichzeitig, daß die Laborwinkel Ψ_1 und φ_1 fixiert sind. Es gilt:

$$\vec{v}_2' = P^{-1}\vec{s}_2 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \sin\Psi_2\cos\varphi_2 \\ \sin\Psi_2\sin\varphi_2 \\ \cos\Psi_2 \end{pmatrix} |\vec{v}_2'| = \begin{pmatrix} \sin\theta_2\cos\chi_2 \\ \sin\theta_2\sin\chi_2 \\ \cos\theta_2 \end{pmatrix} |\vec{v}_2' - \vec{v}| - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{v}| \end{pmatrix}$$

(III.3.19a)

$$D^{-1}\left(T^{-1}\vec{s}_2'\right) = \vec{s}_2^{\,2} = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1\\ 0 & 0 & 0\\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\left[\frac{m_2}{M_{23}}\left|\vec{v}_{2-3}'\right|\begin{pmatrix}\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\frac{m_1}{M}\left|\vec{v}_{1-23}'\right|\right]$$

(III.3.19b)

Damit erhält man

$$\vec{v}_2' = \left(P^{-1}\circ D^{-1}\circ T^{-1}\right)\vec{s}_2 = P^{-1}\left(D^{-1}\left(T^{-1}\vec{s}_2\right)\right). \qquad \text{(III.3.20)}$$

Die Nützlichkeit der Formel (III.3.20) ermißt man an folgender Überlegung: Angenommen, wir haben eine Subsystemresonanz im Subsystem 23 vorliegen, dann ist die Kinematik für diese Reaktion gekennzeichnet (bei jeder Einschußenergie E) durch $\left|\vec{v}_{2-3}'\right| = \text{const.}$ Definieren wir $\frac{m_2}{M_{23}}\left|\vec{v}_{2-3}'\right| = a$ $m_1/M\,\left|\vec{v}_{1-23}'\right| = b(E)$ und bei Vorgabe des Winkels Ψ_1 $\cos\Theta_2 = c(E)$ und $\left|\vec{v}\right| = d(E)$, dann erhalten wir aus der Gleichung (III.3.20):

$$\vec{v}_2' = \begin{pmatrix} c(E) & 0 & -(1-c(E))^{1/2}\\ 0 & 0 & 0\\ (1-c(E))^{1/2} & 0 & c(E)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\sin\alpha\cos\beta\\ a\sin\alpha\sin\beta\\ a\cos\alpha - b(E)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\d(E)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c(E)\,a\sin\alpha\cos\beta + (1-c(E))^{1/2}\left(a\cos\alpha - b(E)\right)\\ 0\\ (1-c(E))^{1/2}\,a\sin\alpha\cos\beta + c(E)\left(a\cos\alpha - b(E)\right) - d(E)\end{pmatrix} \overset{!}{=} \left|\vec{v}_2'\right|\begin{pmatrix}\sin\psi_3\cos\varphi_3\\ \sin\psi_3\sin\varphi_3\\ \cos\psi_3\end{pmatrix}$$

(III.3.21)

Die letzte Gleichung legt nahe, $\varphi_3 = 0$ oder $\varphi_3 = 180^\circ$ zu wählen, dann erhält man für den Winkel Ψ_3 (für den Fall $\varphi_3 = 180^\circ$)

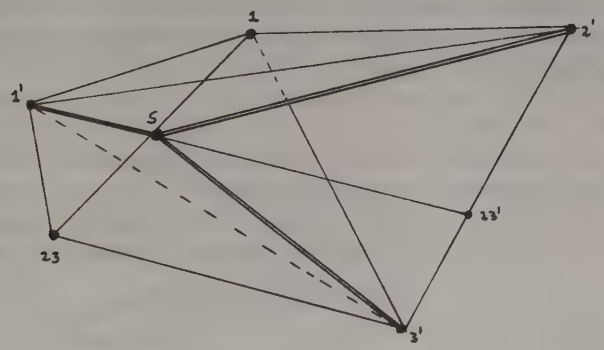
$$\Psi_3 = \arctan\left(\frac{-c(E)\,a\sin\alpha\cos\beta + (1-c(E))^{\frac{1}{2}}\left(-a\cos\alpha + b(E)\right)}{(1-c(E))^{\frac{1}{2}}\,a\sin\alpha\cos\beta + c(E)\left(a\cos\alpha - b(E)\right) - d(E)}\right) \qquad \text{(III.3.22)}$$

Dabei sind die Winkel α , β in folgenden Intervallen zu variieren: $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, 2\pi]$.
Durch die Wahl bestimmter Energieintervalle (damit sind die Wertebereiche der Funktionen b(E) , c(E) bestimmt), die Wahl solcher

Winkel Ψ_1 , unter welchen die Streuamplitude der Streuung des angeregten Subsystems möglichst groß ist, und unter der begründeten Annahme, daß der Resonanzzerfall im Schwerpunkt des Subsystems isotrop ist, kann man das Werteintervall des Winkels Ψ_3 bestimmen, unter dem die Beobachtung der Subsystemresonanz besonders günstig ist. Wir kommen auf diesen Fall im Paragraph (III.5) nochmal zurück. Im nächsten Paragraphen möchten wir die Nützlichkeit des Schnabelmodells für die Diskussion der verschiedenen Resonanzphänomene zeigen.

III.4. Qualitative Diskussion der Resonanzphänomene

Die Diskussion am Ende des letzten Paragraphen hat gezeigt, daß neben der Anschaulichkeit der kinematischen Verhältnisse im Drei-Teilchen-System durch den "Drei-Teilchen-Schnabel" sich auch quantitative Beziehungen vermöge der angegebenen Transformationen beschreiben und in einfacher Weise übersehen lassen. Wir werden uns daher hauptsächlich auf das Schwerpunktsystem beziehen. Wir kommen jetzt auf die Vorstellung des Rohrgestänges zurück, das wir im Paragraph III.2) eingeführt haben. Das Wasser wird in das Rohr 12 hineingepumpt, und wir stellen uns vor, daß im Punkt S ein Verteiler angebracht ist, der das Wasser auf die Rohrstücke 1's , 2's und 3's verteilt (siehe Figur 8).



Figur 8.

Der Distributor im Punkt S entspricht dem Streumechanismus und das Gestänge, das in Figur 8 mit doppelten Linien eingezeichnet ist, einem kinematischen Steuerungsmechannismus. Wir unterscheiden folgende Resonanzsituationen

1) Wesentliche Dreikörperresonanz oder Sudden-break-up-Resonanz liegt vor, wenn der Aufbruch der drei Teilchen unmittelbar, d.h. ohne Zwischenbildung eines Subsystems stattfindet und darin ein Resonanzverhalten zeigt (Figur 9).

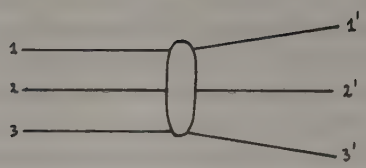


Fig.9

2) Kanalresonanz entspricht einer Zwei-Teilchen-Resonanz, wo ein Streupartner ein Subsystem (auch ein angeregtes Subsystem) zweier Teilchen ist.

3) Subsystemresonanz liegt dann vor, wenn das Drei-Teilchen-System zunächst in ein freies Teilchen und ein angeregtes Subsystem zerfällt (siehe Figur 10).

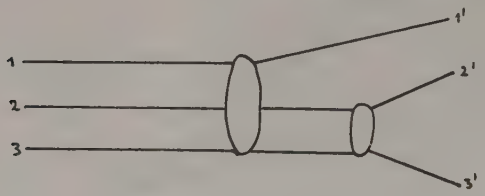


Fig.10

Wir untersuchen zunächst das Zusammnewirken der Kanal- und Subsystemresonanz. Diese Situation liefert schließlich auch ein Modell für eine Sudden-Break-Up-Resonanz, nämlich dann, wenn die Lebensdauer der Subsystemresonanz gegen Null geht. Die Streuung von einem Teilchen und einem gebundenen Subsystem zeigt in dem elastischen Kanal Resonanz. Dabei sei dahingestellt, ob die Rearrangement-Kanäle offen oder geschlossen sind In der Umgebung der Kanalresonanzenergie wird nun verstärkt über die Verteilerstelle S Flüssigkeit in das Rohr $\overline{1'23'}$ hineingepumpt. Jetzt nehmen wir an, daß das Sub-

System (23)' resonanzartig zerfällt. Die Länge des Rohres $\overline{2'3'}$ ist durch die Resonanzenergie des Subsytems vorgegeben. Damit ist die Länge der Stange $\overline{1'-23'}$ bei jeder Einschußenergie fixiert. Vergrößern wir die Einschußenergie, d.h. vergrößern wir das Rohrstück $\overline{1-23}$, so profitiert von dieser Vergrößerung nur das Rohr $\overline{1'-23'}$. Mit anderen Worten, bei diesem Reaktionstyp wird alles bereits im Punkt S ausgehandelt: Die Zahl der Teilchen 2' und 3' ist unabhängig von der Resonanz im Subsystem (23)' durch die Zahl der aus S herauskommenden angeregten Subsysteme (23)' eindeutig vorgegeben. Die Verteilerstelle im Punkt (23)' hat nach Vorgabe der Resonanzenergie nur die Aufgabe, die Winkeln anzugeben (siehe (III.3.15), unter welchen dieser Reaktionstyp beobachtbar ist.

In der Literatur wird gelegentlich eine Behauptung vertreten, die oft zu Mißverständnissen und zu mißverständlicher Deutung der experimentellen Daten Anlaß gibt, daß nämlich die Tatsache, daß beide Resonanzarten nicht miteinander interferieren können, was richtig ist, dazu führt, daß der Wirkungsquerschnitt durch die Subsystemresonanz angehoben wird, also die Subsystemresonanz der Kanalresonanz sozusagen aufgepropft wird. Das Angehobensein des Wirkungsquerschnittes durch die Subsystemresonanz ist kein Verstärkungseffekt durch die letztere, sondern beruht nur auf geeigneter Aufstellung der Detektoren. Diese Überlegungen sind entscheidend für folgendes ebenso simples wie bedeutsames Theorem:

Theorem I: Die Sudden-Break-Up-Resonanz ist aufgrund der Kinematik experimentell von einem gleichzeitigen Vorliegen einer Kanal- und dazugehöriger Subsystemresonanz nicht zu unterscheiden.

Der Beweis ist einfach, wenn man berücksichtigt, daß der Limes der Lebensdauer des Subsystems gegen Null die besprochenen kinematischen Verhältnisse unberührt läßt.

Obwohl dieses Theorem gerechtfertigt ist, veranlasst uns folgender Einwand zu einer abgeschwächten Formulierung: Unterstellen wir das Vorhandensein einer Kanalresonanz im Eingangskanal, so können wir außerhalb der Kanalresonanzenergie bei der Annahme einer Subsystemresonanz nach Gleichung (III.3.15) tatsächlich prüfen, ob sie vorhanden ist. Nehmen wir weiter an, wir hätten die Existenz

der Subsystemresonanz bestätigt gefunden, dann wäre erwiesen, daß wir es mit einem Zusammenwirken beider Resonanzen zu tun haben. Dennoch können wir das mögliche Vorhandensein einer Sudden-break-up-Resonanz nicht ausschließen. Umgekehrt aber haben wir es sicherlich mit einer Sudden-break-up-Resonanz zu tun, falls wir bei höheren Energien die Subsystemresonanz nicht hätten nachweisen können. So gelangen wir zu einer modifizierten Version des Theorems I:

Theorem II: Bei geeignet gewählten Energien können kinematisch vollständige experimentelle Daten in manchen Fällen Anhaltspunkte für die Unterscheidung der Sudden-break-up- und der Kanalresonanz im Verein mit einer Subsystemresonanz liefern. Beim Vorliegen der letzteren kann aber die An- oder Abwesenheit der Sudden-break-up-Resonanz nicht ausgeschlossen werden.

Ähnliche Überlegungen können angestellt werden beim Vorliegen von Subsystemresonanzen in den Rearrangement-Kanälen. Ist der Einschußkanal gegeben durch 1(23) und liegt eine Subsystemresonanz im Subsystem (12)' vor, dann lauten für diesen Fall die Erhaltungssätze im Schwerpunktsystem folgendermaßen:

$$\tfrac{1}{2}\mu_{1-23}\vec{v}^{\,2}_{1-23} = \tfrac{1}{2}\mu_{1-2}\vec{v}'^{\,2}_{1-2} + \tfrac{1}{2}\mu_{3-12}\vec{v}'^{\,2}_{3-12} + Q \qquad \text{(III.4.1)}$$

$$\mu_{1-23}\vec{v}_{1-23} = \mu_{1-2}\vec{v}'_{1-2} + \mu_{3-12}\vec{v}'_{3-12}. \qquad \text{(III.4.2)}$$

Mit diesen Gleichungen können wir wieder einen "Drei-Teilchen-Schnabel" konstruieren. Dabei ist zu beachten, daß das Viereck 1-23-3'-12' kein Trapez mehr ist und die Formel (III.4.15) durch die Formel

$$\tan\vartheta = \sin\theta \Big/ \left(\frac{M_{23}}{m_1}\left(\frac{m_3 M_{12}}{m_2 M_{23}} - Q/E^{s}_{tot}\right)^{-1/2} + \cos\theta\right) \qquad \text{(III.4.3)}$$

ersetzt werden muß. Dabei ist hier ϑ der Winkel, unter welchem das Teilchen im Laborsystem beobachtet wird und θ der entsprechende Winkel im Schwerpunktsystem. Ansonsten kann die gesamte

Konstruktion des "Drei-Teilchen-Schnabels" und die angegebenen Transformationen auf den Seiten (35 - 37) für den "Rearrangement-Drei-Teilchen-Schnabel" übernommen werden. Man kann dann die Interferenzen von verschiedenen Subsytemresonanzen, sofern sie zu Kanälen mit denselben Quantenzahlen gehören, studieren, indem man die Bewegungen des Gestänges beider Schnäbel untersucht. Man kann beispielsweise einen gemeinsamen Winkel Ψ_1 - über die Formel (III.2.22) einmal auf die Gleichung (III.3.15), zum anderen auf die Gleichung (III.3.4) angewendet - finden, wo die beiden Subsystemresonanzen kinematisch beobachtbar sind. Hier haben wir angenommen, daß je ein Teilchen aus jedem Subsystem zu derselben Teilchensorte gehört.

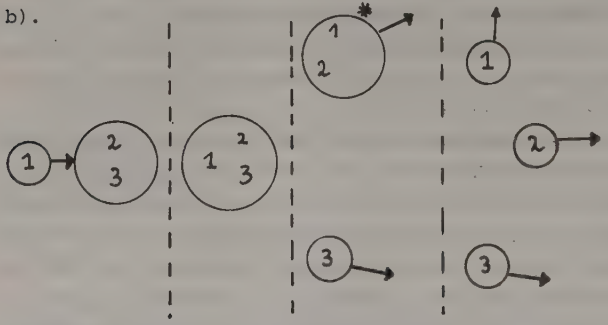
Auch andere noch komplizierte Situationen lassen sich denken, wie das Vorhandensein einer Kanalresonanz und zweier Subsytemresonanzen, und in den "Schnabelbildern" beschreiben. Wenn man bedenkt, daß in einem solchen Fall die Kanalresonanz in dem einen Kanal einen Stufencharakter und in dem anderen zur Diskussion anstehenden Kanal einen Dispersionscharakter hat (Ref. /1/), können diese Resonanzen experimentell bis zu ihrer Unkenntlichkeit "verzerrt" werden. Die mathematische Einfachheit und Anschaulichkeit des "Drei-Teilchen-Schnabels" ist deswegen ein geeignetes Mittel für die Anordnung der Experimente und die Interpretation experimenteller Daten. Für die Untersuchung von Interferenzen und für die ihnen zugrunde liegenden verschiedenen "Drei-Teilchen-Schnabel"-Systeme kann amn folgende Regel angeben:

1) Eine Interferenz liegt vor, wenn aus den Röhren verschiedener Drei-Teilchen-Gestänge dieselbe Teilchensorte mit denselben Quantenzahlen in dieselbe Richtung hinausgeschleudert werden.

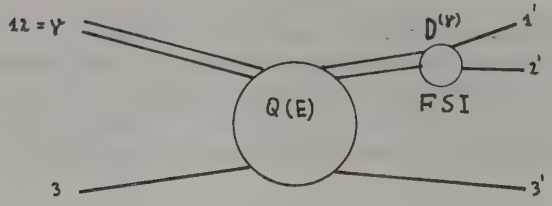
2) Innerhalb der Röhren finden keine Interferenzen statt.

III.5. Der Leuchtturmeffekt

Die Idee, die Aufbruchsamplitude zu faktorisieren in einen Teil, der die Produktion eines Zustandes mit einem Teilchen und einem Subsystem beschreibt und in einen Teil, der das dynamische Verhalten eines Subsystems außerhalb des Bereichs der "Primary Interaction", der Wechselwirkung, die den Aufbruch verursacht, beschreibt, wurde bereits 1952 von WATSON /47/ dargelegt, als noch keine exakte Theorie der Dreiteilchensysteme existierte. Sie fand dann später ihre Rechtfertigung durch AMADO /48/ im Rahmen der Faddeevtheorie. Die Watsonsituation kann man schematisch in einem Zwei-Stufen-Aufbruch-Mechanismus beschreiben (siehe Figur 11a und b).



Figur 11 a. Mechanismus des sequentiellen Aufbruchs



Figur 11 b. Graphisches Bild für die Final State Interaction

Ursprünglich entsprach dem Watsonmodell die Faktorisierung der Dreiteilchenaufbruchsamplitude $U_{0\alpha}$

$$U_{\alpha\alpha} \sim Q(E)\, f_\nu(\vec{p}_\nu)\,, \qquad \text{(III.5.1)}$$

wobei $f_\nu(\vec{p}_\nu)$ die Streuamplitude des "Final-State"-Wechselwirkenden Subsystems ist und $Q(E)$, die "Produktionsamplitude", als von $\vec{p}_\nu$ nur schwach abhängig angenommen wurde. $\vec{p}_\nu\,(=\mu_{\alpha\beta}\vec{v}_{\alpha\beta})$ ist der Relativimpuls im Subsystem (23). Später wurde der Ansatz modifiziert durch

$$U_{\alpha\alpha} \sim Q(E)\left| D^{(\nu)}\left(\frac{\vec{p}_\nu^{\,2}}{2\mu_\nu}\right)\right|, \qquad \text{(III.5.2)}$$

wobei $D^{(\nu)}\left(\frac{\vec{p}_\nu^{\,2}}{2\mu_\nu}\right)$ der Enhancementfaktor ist (detaillierte Diskussion findet man in /49/), der für große Energien gegen 1 strebt und nur bei kleinen Energien, also im final-state-Bereich Einfluß nimmt auf die Struktur der Aufbruchsamplitude. Der Enhancementfaktor ist praktisch nichts anderes als die effektive Reichweitennäherung. Eine Übersicht über das Watsonmodell und seine Anwendung findet man in /50/.

Man kann zwei Arten von Zuständen mit Final-State-Wechselwirkung unterscheiden. Einmal solche, wo sich die Zustände der Zweiteilchensubsysteme durch eine mittlere Lebensdauer charakterisieren lassen - Resonanzen, die z.B. einer Breit-Wigner-Formel gehorchen - und zum anderen Zustände, deren Subsysteme nicht mit einem exponentiellen Zerfallgesetz beschrieben werden können, z.B. das n-p-Singulett-System oder n-n- oder p-p-Systeme, die aber bei niederen Relativenergien über den "Primary-Interaction"-Bereich hinaus längere Zeit in Wechselwirkung stehen können. Diese Art von Final-State-Wechselwirkung ist von "Boundstate"- oder "Antiboundstate"-Polen im Enhancementfaktor geprägt, die sich um so stärker bemerkbar machen, je näher sie an der Kontinuumsschwelle liegen. Die letztere Art von Final-State-Wechselwirkungen wurde von ZUPANČIČ /51/ untersucht, der gezeigt hat, daß man auch solchen Systemen eine mittlere Zeit τ des Wechselwirkens zuschreiben kann

$$\tau = \frac{1}{|\vec{v}_\nu|}\left(R + \frac{1}{p_\nu} + \frac{d\delta}{d\,p_\nu}\right). \qquad \text{(III.5.3)}$$

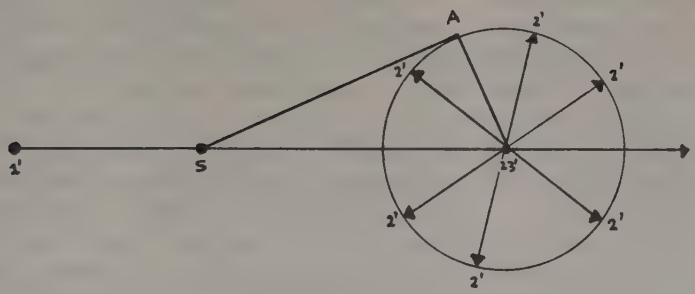
Diese Formel ist ein Spezialfall der Wignerschen Kausalitätsungleichung /52/. $\vec{v}_r$ ist die Relativgeschwindigkeit (z.B. $\vec{v}_r = \vec{v}_{1-2}$), R die Reichweite des Final-State-Potentials, δ die Streuphase und $1/\rho_r$ berücksichtigt eine Ortsunschärfe, die proportional der Wellenlänge ist. Wir haben die Diskussion der Final-State-Wechselwirkung den kinematischen Überlegungen vorgeschaltet, weil die Unterscheidung von zwei Arten von Final-State-Wechselwirkung in dieser Arbeit von großem Interesse ist. Im Kapitel V werden wir sogenannte "Zweikörper-Pauliresonanzen" untersuchen, die den Charakter einer Resonanz, eines Positive Energy Bound State und auch eines Bindungszustandes haben können.

In diesem Paragraph möchten wir aber einen Effekt, den man den Leuchtturm- oder Scheinwerfereffekt nennen kann, im Zusammenhang einer Subsystemresonanz erläutern. Wir nehmen dazu an, daß die Subsystemresonanz im Subsystem (23) vorliegt und daß die experimentelle Situation dadurch vorgegeben ist, daß man Teilchen 1 stets unter festem Winkel mißt. In diesem Fall bedeutet die Zunahme der gesamten Energie nur eine Zunahme der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}'_{1-23}$. Wie schon im vorangehenden Paragraphen erwähnt, ist der Betrag der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}'_{2-3}$ durch die Subsystemresonanzenergie fixiert und kugelförmig und gleichmäßig bezüglich des Punktes (23)' verteilt, falls wir einen isotropen Zerfall der Subsystemresonanz im Schwerpunkt des Subsystems (23) unterstellen. Alle Richtungen von $\overrightarrow{(23')2'}$ $(= \frac{m}{m}\vec{v}'_{2-3})$ (bzw. alle Richtungen $\overrightarrow{(23')3'}$) können wir im Schwerpunktsystem durch die Einhüllende aller Vektorendpunkte $\overrightarrow{(23')2'}$, d.h. den Ort aller Positionen des Teilchens 2' (bzw. 3') im Geschwindigkeitsraum kennzeichnen. Die Situation ist in Figur 12 skizziert.

Vom Drei-Teilchen-Schwerpunkt S aus wird das Teilchen 2' unter dem Winkel ϑ ausgesandt. Erhöhen wir nun die Einschußenergie, so wird sich der Winkel ϑ verkleinern (siehe Figur 12), denn die Strecke $\overline{2'(23')}$ bleibt konstant, wogegen die Strecke $\overline{S\ 23'}$ gedehnt wird, sodaß gilt $\vartheta_1 > \vartheta_2$ für $E_1 > E_2$. E_i, i=1,2, bezeichnet die Einschuß-Energie.

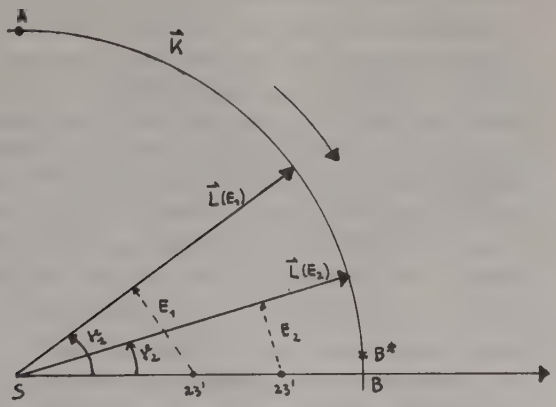
Während beim Zweikörperzerfall sich eine scharfe Resonanz immer nur in der Umgebung einer bestimmten Energie zeigt, macht sich eine Subsystemresonanz im Dreikörperaufbruch bei allen Energien

bemerkbar. Ein Maximum im differentiellen Wirkungsquerschnitt



Figur 12. SA ist die Einhüllende des Konus, in dem die Zerfälle der (scharfen) Subsystemresonanz liegen. Der Winkel wurde hier durch die maximale Komponente (23')2' senkrecht zu S2' festgelegt. Die Winkeln zwischen den Richtungen $\overrightarrow{S2'}$ und $\overrightarrow{S(23')}$ parametrisieren die Einhüllende SA. Diese Winkel liegen zwischen γ und $-\gamma$.

liegt (bei kugelsymmetrischen Zerfall der Subsystemresonanz) in der Nähe der durch die Einhüllende SA in Fig.12 bzw. der durch $\vec{L}(E)$ in Figur 13 gegebenen Richtung.



Figur 13. Dieses Bild zeigt die Richtung des Fahrstrahls für zwei Energien E_1 und E_2.

Aus der Figur 13 ist zu ersehen, daß der Fahrstrahl $\vec{L}(E)$ das Kreis- (oder dreidimensional: das Kugel-) Segment (mit dem Mittelpunkt in S) vom Punkt A bis zum Punkt B* überfährt. Der Punkt B entspricht der Energie ∞. Das heißt, der Fahrstrahl $\vec{L}(E)$ überstreicht mit steigender Dreikörperenergie E den Bereich A-B. Dieses Verhalten ähnelt dem Wandern des Scheinwerferstrahles eines Leuchtturms und wir bezeichnen es deshalb anschaulicherweise als Leuchtturmeffekt. Interessant wird die Anordnung, wenn bei einer bestimmten Dreiteilchenenergie E zusätzlich zu der angenommenen Subsystem-Resonanz eine scharfe Dreikörperresonanz existiert. Es ist dann zu erwarten, daß es auffallende Interferenzeffekte im fünffach differentiellen Wirkungsquerschnitt gibt, wenn der "Scheinwerferstrahl" die zu E gehörende Richtung $\vec{L}(E)$ überstreicht. Eine genaue Untersuchung dieser etwaigen Interferenzen müßte die Stichhaltigkeit der Argumente der Stationary Phase und der Kohärenzbedingungen prüfen, was aber außerhalb dieser kinematischen Erörterung liegt. Eine erste Andeutung für einen solchen Interferenzeffekt sieht man, wie gesagt, bereits im Fall von zwei gekoppelten Zweikörperkanälen. Im Fall der unendlich vielen Aufbruchskanälen kann die Interferenzerscheinung natürlich sehr viel komplizierter werden.

Es muß nicht immer eine scharfe Subsystemresonanz existieren. Aber ein Final State Peak existiert in realen Streusystemen fast immer. In diesem Fall ist die Interferenzerscheinung im Bereich der Richtung SB zu erwarten.
Der Leuchtturmeffekt ist zunächst übersichtshalber im Schwerpunkt-System konzipiert worden. Der Übergang zum Laborsystem läßt sich leicht beschreiben. Im Laborsystem wird der Kreis K bzw. die entsprechende Kugel zu einer Ellipse beziehungsweise - dreidimensional - zu einem Ellipsoid verzerrt, was bedeutet, daß für verschiedene Energieintervalle der Fahrstrahl $\vec{L}$ ungleich schnell läuft. Für die experimentelle Anordnung, die den Fahrstrahl nachweisen möchte, hat das zur Folge, daß bei gleichen Energieschritten die Winkel, unter welchen die Detektoren aufgestellt sind, verschieden stark in der Lage geändert werden müssen.

Abschließend kann man feststellen, daß die physikalische Situation außerordentlich kompliziert werden kann, wenn man alle Reaktionsmechanismen, die wir in diesem Kapitel besprochen haben, in Konkurrenz treten läßt. Ihre Analyse bleibt jedoch im "Drei-Teilchen-Schnabel"-Bild einfach und übersichtlich.

IV. Beschreibung von scharfen Compoundresonanzen in Drei-Cluster-Break-Up-Reaktionen

IV.1. Einführung

Im Kapitel II haben wir die Ableitung des Hamiltonoperators zur Beschreibung der Dynamik von drei Clustern im Rahmen der Resonating-Group-Theorie angedeutet (siehe Gleichung (II.1.3) und dort angeführte Referenzen). Darin werden Cluster als Punktteilchen behandelt und ihre interne Struktur sowie der Einfluß des Pauli-Prinzips finden - ohne jede Einschränkung - Niederschlag in den dort definierten Wechselwirkungsoperatoren. Der Hamiltonoperator hat im Ortsraum folgende Form:

$$\mathcal{H} = -\hbar^2\Delta_{\vec{\xi}} - \hbar^2\Delta_{\vec{\eta}} + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \,. \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Dabei beschreiben die Potentiale V_i, i=1,2,3 die Wechselwirkung zwischen den Teilchen j und k ($i \neq j \neq k$) und $V_4 = V(1,2,3)$. Diese Potentiale sind energieabhängig und teils lokaler teils nichtlokaler Natur. Anfangszustände in einem Dreiteilchenproblem sind Eigenzustände zu den Kanalhamiltonoperatoren

$$h_\alpha |\phi_{\alpha m}\rangle \equiv (-\hbar^2\Delta_{\vec{\xi}} - \hbar^2\Delta_{\vec{\eta}} + V_\alpha)|\phi_{\alpha m}\rangle = E_{\alpha m}|\phi_{\alpha m}\rangle. \qquad \text{(IV.1.2)}$$

Die sogenannten Kanalfunktionen $|\phi_{\alpha m}\rangle$ beschreiben die freie Bewegung vom Teilchen α relativ zu den beiden anderen, deren Bindungszustand durch den Index m gekennzeichnet ist. Mit Hilfe der Kanalhamiltonoperatoren schreibt sich der Gesamthamiltonoperator

$$\mathcal{H} = h_\alpha + \bar{V}_\alpha = h_\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\gamma \,, \quad \alpha = 0,1,2,3,4 \,. \qquad \text{(IV.1.3)}$$

Dabei haben wir mit der Definition $V_0=0$ zusätzlich noch zwei weitere Hamiltonoperatoren

$$h_0 = (-\hbar^2\Delta_{\vec{\xi}_\beta} - \hbar^2\Delta_{\vec{\eta}_\beta}) \,, \quad h_4 = h_0 + V_4 \,, \quad \beta = 1,2,3 \qquad \text{(IV.1.4)}$$

für den Aufbruchskanal eingeführt. In Pragraph II.2 haben wir ferner das Drei-Cluster-Resonanz-Potential V_c eingeführt. Damit lautet der gesamte Hamiltonoperator $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \mathcal{H} + V_c = h_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4^{qcs}, \qquad \text{(IV.1.5)}$$

wobei

$$V_4^{qcs} = V_4 + V_4^c \quad (V_4^c \equiv V_c). \qquad \text{(IV.1.6)}$$

Im Sinne unseres in Pargraph II.2 definierten Modells dürfen wir V_4 - nach entsprechenden Transformationen - gegenüber V_4^c vernachlässigen. Der Hamiltonoperator, der den Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen in diesem Kapitel darstellen wird, lautet somit

$$\mathbb{H} = \mathcal{H} + V_c = h_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_c. \qquad \text{(IV.1.7)}$$

Bis jetzt wurden Wenig-Teilchen-Systeme für Teilchen, die miteinander nur über Zwei-Teilchen-Potentiale wechselwirken gelöst. Nur eine Arbeit von GREGORIO und AVALOS /53/ behandelt am Rande das Drei-Teilchen-Potential in einem Drei- und Vier-Teilchen-System im Rahmen einer T-Matrix-Theorie . Bevor wir in den folgenden Paragraphen einige Lösungsvorschläge des Drei-Teilchen-Problems , beschrieben durch den Hamiltonoperator in Gleichung (IV.1.7), unterbreiten, möchten wir hier zum Schluß dieser Einleitung einen Überblick über die Verfahren geben, die zur numerischen Behandlung des Drei-Teilchen-Problems auf der Basis der Zwei-Teilchen-Potentiale geeignet sind.

Bis zum Jahre 1976 waren die FADDEEV-Integralgleichungen /26/ im Impulsraum das einzige Mittel um das Drei-Teilchen-Problem mathematisch korrekt zu behandeln. Nach vollführter Drehimpulszerlegung erhält man ein System von gekoppelten Gleichungen in zwei Variablen. Dieses System kann im Fall der separablen Potentiale zu einem System von Intergleichungen einer einzigen Variablen reduziert werden. Und tatsächlich wurden die FADDEEV-Gleichungen für diesen Fall zuerst ge-

löst. Trotz der immensen Vereinfachung der Intergleichungen haben die separablen Potentiale einige Nachteile:

1) Sie haben keine anschauliche Bedeutung als Potentiale,
2) Sie sind nicht lokal und aus mathematischem Bedürfnis heraus etwas "ad hoc" eingeführt und deshalb
3) ein wenig unrealistisch; z.B. in der Nukleon-Nukleon Wechsel-Wirkung sind separable Potentiale außerstande den Pionaustausch-Schwanz der Wechselwirkung zu reproduzieren.

Für alle nichtlokalen und lokalen Potentiale ist eine direkte Lösung des Systems von Integralgleichungen in zwei Variablen mit den heute verfügbaren Computern noch unmöglich. Das ist der Grund, warum der erste Schritt in Richtung auf eine realistische Beschreibung des n-d-Streuproblems in einem iterativen Prozeß mittels der Padé-Approximanten bestand, um die Integralgleichungen in zwei Variablen im Fall von lokalen Potentialen zu lösen /8/. Einen Überblick über die einschlägigen numerischen Techniken erhält man in dem Buch von SCHMID und ZIEGELMANN /50/ und in der Habilitationsschrift von ZIEGELMANN /54/.

1976 wurde die Drei-Teilchen-Theorie im Ortsraum für den Fall von lokalen Potentialen vorläufig abgeschlossen, an deren Enstehen NOYES /55/, MERKURIEV, GIGNOUX und LAVERNE /56-60/ und NUTALL /61-63/ maßgeblich beteiligt waren. Eine erfolgreiche numerische Methode des entsprechenden Randwertproblems Im Ortsraum wurde in Ref./64/ unterbreitet und mit anderen Methoden verglichen. Ähnliche Methoden für nichtlokale oder gar separable Potentiale im Ortsraum stehen noch aus.

In diesem Kapitel möchten wir die WILDERMUTH-BENÖHR'sche Theorie der Resonanzen in Zwei-Körper-Kanälen auf das Drei-Cluster-System ausdehnen. Wir wollen die Schrödingergleichung

$$(H - E)\chi = 0 \qquad \text{(IV.1.8a)}$$

lösen und nehmen dazu an, daß die Gleichung

$$(\chi - E)\chi' = 0 \qquad \text{(IV.1.8b)}$$

bereits gelöst sei. Die Operatoren H und $\mathcal{H}$ sind in den Gleichungen (IV.1.7) und (IV.1.5) definiert worden. Allerdings, wie bereits erwähnt, sind die Potentiale, die in den Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ eingehen, von komplizierter , teils lokaler, teils nichtlokaler Struktur und obendrein energieunabhängig. Für solche Potentiale stehen keine theoretischen Modelle geschweige denn numerische Methoden zur Verfügung. Die Gleichung (IV.1.8b) ist jedoch dank SCHMID'schen Theorien von separablen Approximationsmethoden im Impulsraum mit den Codes von EBENHÖH /9/ oder DOLLESCHALL /10/ lösbar, wenn wir im Sinne der Dominanz einer Resonanz das Drei-Teilchen-Potential V_4 vernachlässigen. Unserer Lösungsvorschlag der Gleichung (IV.1.7) basiert auf einer Lösungstechnik im Ortsraum: Wir konstruieren die zur Gleichung (IV.1.8b) gehörige Greensfunktion G aus den als bekannt angenommenen Lösungen, und erhalten als Lösung von (IV.1.8a)

$$\chi^+ = \chi'^+ + G^+ V_c \chi^+ \quad , \text{ wobei} \qquad \text{(IV.1.9)}$$

$\chi^{+\prime}$ die Lösung der Gleichung (IV.1.8b) zur Energie E mit der richtigen Randbedingung und das Resonanzpotential von separabler Gestalt ($V_c = F\lambda(E)F$, siehe Formel (IV.2.19)) ist.Zu beachten ist, daß bei der Konstruktion der Greensfunktion G^+ angenommen werden muß, daß die Energieabhängigkeit von $\mathcal{H}$ fixiert ist. Das heißt: Das Lösungsspektrum von Gleichung (IV.1.8) wird so gebildet, daß man E als Eigenenergie der Gleichung (IV.1.8) zwar alle Werte durchlaufen läßt, gleichzeitig aber E in $H(E)$ festhält und gleich dem Wert setzt, für den man die Greensfunktion $G^+(E)$ haben will. Auf diese Weise wird H zum hermiteschen Operator. Gleichung (IV.1.9) kann man wegen der Separabilität von V_c algebraisch lösen, und erhält

$$\chi^+ = \chi'^+ + \frac{G^+|F\rangle\langle F|\chi'^+\rangle}{\lambda - \langle F|G^+|F\rangle} \quad . \qquad \text{(IV.1.10)}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der von WILDERMUTH und BENÖHR angegebenen Gleichung in Ref. /1/, die wir allerdings im Drei-Cluster-Raum auszuwerten haben. Die Auswertung von (IV.1.10) ist vollzogen, wenn man die asymptotische Gestalt von der Resolvente G wird in allen experimentell relevanten asymptotischen Bereichen der Drei-Teilchen-Raumes kennt. Die Herleitung der asymptotischen

Formeln für die Resolvente G wird in Paragraph IV.4 geleistet. Die asymptotische Darstellung der Resolvente und ihre Auswertung im Zusammenhang mit Gleichung (IV.1.10) erlaubt eine unmittelbare Berechnung der Übergangsamplituden durch Überintegration. Dabei steht es uns frei, diese Integration der T-Matrixelemente im Orts- oder Impulsraum auszuführen. Es wird sich zeigen, daß die bereits erfolgreich erprobten numerischen Lösungsmethoden der FADDEEV-Integralgleichungen (mit separabler Darstellung der Potentiale), die im Impulsraum arbeiten, benutzen können. Den mit dem Formfaktor im Nenner der Gleichung (IV.1.10) auftretenden Term kann man formal wie bei WILDERMUTH-BENÖHR in Real- und Imaginärteil aufspalten. Der Realteil liefert die Energieverschiebung des Resonanzpols, der Imaginärteil liefert eine Summe und ein Integral über energieabhängige Funktionen, die für die Breite der Resonanz der Resonanz maßgebend sind. Die detaillierte Analyse der Resonanzamplitude in Paragraph IV.5 zeigt, daß das Integral im Imaginärteil von $\langle F|G^{+}|F\rangle$ mit dem Aufbruch korrespondiert. Das zeigt, daß der Aufbruch, wie intuitiv erwartet, ein Kontinuum von unendlich vielen Kanälen ist, denn im Aufbruchsfall entspricht jeder Verteilung der Energie über die drei Fragmente ein Kanal.

Zum Schluß dieser Einführung möchten wir vermerken, daß für den Fall, daß F die Struktur einer Zweikörperresonanz hat (daraus folgt, daß das Resonanzpotential von der Gestalt $V_c = 1_\alpha \otimes V_c^\alpha$,d.h. ein Zwei-Teilchen-Potential ist), unserer Lösungsweg nicht gangbar ist. Erstens ist die algebraische Lösung der Gleichung (IV.1.9) nicht mehr möglich, und zweitens, selbst wenn wir den zu V_c^α gehörigen Operator T_c^α über entsprechende Integralgleichung uns hätten besorgen können, würde die Rechtfertigung für die Benutzung der asymptotischen Gestalt von G hinfällig werden. Denn bei der Ableitung der asymptotischen Formeln von $G(\vec{R},\vec{R}')$ wird stets davon ausgegangen, daß $|\vec{R}| \gg |\vec{R}'|$. Auf der anderen Seite sind die Phänomene der Subsystemresonanzen im Rahmen des Drei-Teilchen-Systems in der Watson-Modell-Literatur /65-70/ hinlänglich untersucht und beschrieben worden, sodaß wir diesbezüglich auf die Literatur verweisen.

IV.2 FADDEEV-Gleichungen für Wellenfunktionen mit Drei-Teilchen-Potential

Aus der zeitabhängigen Streutheorie /50/ folgt, daß die zeitunabhängige Lösung der Schrödingergleichung bei gegebenem Anfangszustand $|\phi_{am}\rangle$ gegeben ist durch

$$|\chi^{+}_{am}\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon G(E+i\varepsilon)|\phi_{am}\rangle. \qquad \text{(IV.2.1)}$$

Dabei ist G(z), z= E + iε , die volle Resolvente des Drei-Teilchen-Systems. Mit den Kanalresolventen

$$g_\alpha(z) = (z - h_\alpha)^{-1} \quad , \quad \alpha = 0,1,2,3,4 \qquad \text{(IV.2.2)}$$

gelten die folgenden Resolventengleichungen

$$G(z) = g_\alpha(z) + g_\alpha(z)\,\bar{V}_\alpha\, G(z) \qquad \text{(IV.2.3a)}$$

$$G(z) = g_\alpha(z) + G(z)\,\bar{V}_\alpha\, g_\alpha(z). \qquad \text{(IV.2.3b)}$$

Setzt man Gleichung (IV.2.3a) in Gleichung (IV.2.1) ein, so erhält man eine Integralgleichung für den Streuzustand

$$|\chi^{+}_{am}\rangle = |\phi_{am}\rangle + g_\alpha(E+i0)\,\bar{V}_\alpha\,|\chi^{+}_{am}\rangle, \qquad \text{(IV.2.4)}$$

die Lippmann-Schwinger-Gleichung. Diese Gleichung ist aber nicht eindeutig lösbar. Fordert man neben

$$|\chi^{+}_{im}\rangle = |\phi_{im}\rangle + g_i(E+i0)\,\bar{V}_i\,|\chi^{+}_{im}\rangle \qquad \text{(IV.2.5a)}$$

noch

$$|\chi^{+}_{im}\rangle = \qquad g_i(E+i0)\,\bar{V}_i\,|\chi^{+}_{im}\rangle \qquad \text{(IV.2.5b)}$$

und

$$|\chi^{+}_{1m}\rangle = \ldots \quad g_3(E+i0)\,\bar{V}_3\,|\chi^{+}_{1m}\rangle, \qquad \text{(IV.2.5c)}$$

für den Fall von Zweiteilchenpotentialen, so ist, wie von GLÖCKLE /71/ gezeigt wurde, die Lösung $|\chi^{+}_{1m}\rangle$ eindeutig bestimmt. FADDEEV /26/ gelangte zu einer geschlossenen Lösung des Problems, die im Vergleich zu (IV.2.5) wesentlich computerfreundlicher ist - da nur ein Operatorprodukt auszuwerten ist - , indem er die Lösung $|\chi^{+}_{1m}\rangle$ in drei Komponenten aufspaltete

$$|\chi^{+}_{1m}\rangle = \sum_{i=1}^{3} \chi^{i}_{1m}\,, \qquad \text{(IV.2.6)}$$

wobei die Komponenten $\chi^{i}_{1m} = g_0 V_i \chi_{1m}$ für i=1,2,3 definiert sind, und für diese Komponennten folgende Gleichung angegeben hat

$$\begin{pmatrix} \chi^{1}_{1m} \\ \chi^{2}_{1m} \\ \chi^{3}_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{1}_{1m} \\ \chi^{2}_{1m} \\ \chi^{3}_{1m} \end{pmatrix}. \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Dabei sind t_i i=1,2,3 die Zweikörper-T-Matrizen mit der Eigenschaft, daß

$$g_\alpha V_\alpha = g_0 t_\alpha\,. \qquad \text{(IV.2.8)}$$

Die Ableitung eines entsprechenden Kopplungsschemas wie (IV.2.7) für den Fall, daß eine Dreikörperkraft noch anwesend ist, ist auf diesem Hintergrund schnell angegeben. Ausgehend von den Glöckle-Gleichungen

$$\begin{aligned} |\chi^{+}_{1m}\rangle &= |\phi_{1m}\rangle + g_1(E+i0)\,\bar{V}_1\,|\chi^{+}_{1m}\rangle \\ |\chi^{+}_{1m}\rangle &= g_2(E+i0)\,\bar{V}_2\,|\chi^{+}_{1m}\rangle \\ |\chi^{+}_{1m}\rangle &= g_3(E+i0)\,\bar{V}_3\,|\chi^{+}_{1m}\rangle \\ |\chi^{+}_{1m}\rangle &= g_4(E+i0)\,\bar{V}_4\,|\chi^{+}_{1m}\rangle, \end{aligned} \qquad \text{(IV.2.9)}$$

die garantieren, daß a) im Kanal 1 das freie Cluster 1 und das im m-ten Anregungszustand gebundene Subsystem (23) einlaufen, b) in Kanälen 2 und 3 keine Teilchen einlaufen, c) kein freier Drei-Clusterzustand einläuft, erhält man in der zum FADDEEV-Vorgehen analogen Weise durch Multiplikation mit $g_0 V_i$

$$
\begin{aligned}
g_0 V_2 |\chi^+_{1m}\rangle &= g_0 V_2 |\phi_{2m}\rangle + g_0 V_2 g_2 (V_2 + V_3 + V_4) |\chi^+_{1m}\rangle \\
g_0 V_2 |\chi^+_{1m}\rangle &= g_0 V_2 g_2 (V_1 + V_3 + V_4) |\chi^+_{1m}\rangle \\
g_0 V_3 |\chi^+_{1m}\rangle &= g_0 V_3 g_2 (V_2 + V_2 + V_4) |\chi^+_{1m}\rangle \\
g_0 V_4 |\chi^+_{1m}\rangle &= g_0 V_4 g_2 (V_1 + V_2 + V_3) |\chi^+_{1m}\rangle .
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.2.10)}
$$

Definiert man

$$
\chi^i_{1m} = g_0 V_i |\chi_{1m}\rangle \qquad i = 1,2,3,4 ,
$$

so erhält man wegen

$$
g_0 V_i g_i = g_i - g_0 = g_i V_i g_0 , \qquad \text{(IV.2.11)}
$$

und $g_0 V_1 |\phi_{1m}\rangle = |\phi_{1m}\rangle$ folgendes System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
|\chi^1_{1m}\rangle &= |\phi_{1m}\rangle + g_1 V_1 \left(|\chi^2_{1m}\rangle + |\chi^3_{1m}\rangle + |\chi^4_{1m}\rangle\right) \\
|\chi^2_{1m}\rangle &= g_2 V_2 \left(|\chi^1_{1m}\rangle + |\chi^3_{1m}\rangle + |\chi^4_{1m}\rangle\right) \\
|\chi^3_{1m}\rangle &= g_3 V_3 \left(|\chi^1_{1m}\rangle + |\chi^2_{1m}\rangle + |\chi^4_{1m}\rangle\right) \\
|\chi^4_{1m}\rangle &= g_4 V_4 \left(|\chi^1_{1m}\rangle + |\chi^2_{1m}\rangle + |\chi^3_{1m}\rangle\right) .
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.2.12)}
$$

Wegen (IV.2.8) können wir (IV.2.12) umschreiben und erhalten

$$\begin{pmatrix} \chi^1_{1m} \\ \chi^2_{1m} \\ \chi^3_{1m} \\ \chi^4_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 & t_3 \\ t_4 & t_4 & t_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1_{1m} \\ \chi^2_{1m} \\ \chi^3_{1m} \\ \chi^4_{1m} \end{pmatrix} . \qquad \text{(IV.2.13)}$$

Der Operator t_4 ist in Gleichung (IV.2.20) definiert und im mathematischen Anhang A hergeleitet. Die Lösung des Problems erhält man aus der Summation aller Komponenten χ^i_{1m} :

$$|\chi^+_{1m}\rangle = \sum_{i=1}^{4} \chi^i_{1m} . \qquad \text{(IV.2.14)}$$

Ein Blick auf das System (IV.2.12) oder (IV.2.13) lehrt uns, daß diese Gleichungen eindeutig lösbar sind, weil der Integralkern kompakt ist. Der Beweis ist einfach: Wir bemerken, daß nur in $g_\alpha V_\alpha$ $\alpha = 1,2,3$ die "gefährlichen" δ- Funktionen auftreten, wie das auch in Gleichung (IV.2.7) der Fall ist. $g_4 V_4$ besitzt diese δ- Funktion nicht, und wir wollen annehmen, daß V_4 ein kompakter Operator im Raum der Clusterkoordinaten ist. Durch Iteration von (IV.2.12) erhalten wir Ausdrücke, die multiplikativ mit $g_4 V_4$ erscheinen, und von welchen FADDEEV nachgewiesen hat, daß sie für eine große Klasse von Operatoren V_i $i=1,2,3$ kompakt sind. Die besagten Ausdrücke werden somit auf Bekanntes zurückgeführt, und lassen sich darstellen als Produkt zweier kompakten Kerne, das wiederum kompakt ist. Damit ist der Beweis erbracht. Nach etwas langwierigen Operatorumformungen findet man, daß die Systeme (IV.2.12) und (IV.2.13) konsistent und von derselben Struktur sind wie die von GREGORIO und AVALOS /53/ abgeleiteten FADDEEV-ähnlichen Gleichungen für die T-Matrizen. Damit ist der Beweis mit dem Vorgehen der beiden oben genannten Autoren konsistent. Ausgehend von dem vier-dimensionalen System (IV.2.12) gelangen wir durch Elimination der vierten Komponente zu einem drei-dimensionalen System

$$\begin{pmatrix} \chi^1_{1n} \\ \chi^2_{1n} \\ \chi^3_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_0 V_1 G_4 V_4 & g_0 V_1 & g_0 V_1 \\ g_2 V_2 & g_2 V_2 g_0 V_4 & g_2 V_2 \\ g_3 V_3 & g_3 V_3 & g_3 V_3 g_0 V_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1_{1n} \\ \chi^2_{1n} \\ \chi^3_{1n} \end{pmatrix}. \tag{IV.2.15}$$

Die Lösung lautet jetzt

$$\chi_{1n} = \sum_{i=1}^{3} \chi^i_{1n}. \tag{IV.2.16}$$

Beachten wir noch Gleichung (IV.2.8) so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \chi^1_{1n} \\ \chi^2_{1n} \\ \chi^3_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + g_0 \begin{pmatrix} t_1 g_0 t_4 & t_1 & t_1 \\ t_2 & t_2 g_0 t_4 & t_2 \\ t_3 & t_3 & t_3 g_0 t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1_{1n} \\ \chi^2_{1n} \\ \chi^3_{1n} \end{pmatrix}. \tag{IV.2.17}$$

Der Vergleich mit dem Kern der Gleichung (IV.2.7) zeigt uns, daß wir in Anwesenheit einer Dreikörperkraft die Nullen der Diagonale des FADDEEVkerns mit $t_1 g_0 t_4$, $t_2 g_0 t_4$ und $t_3 g_0 t_4$ zu ersetzen haben. Wir schreiben die Gleichung (IV.2.17) noch aus, weil wir sie für die nachstehende Diskussion noch brauchen werden.

$$\chi_{1n} = \chi^1_{1n} + \chi^2_{1n} + \chi^3_{1n} = \phi_{1n} + g_0 (t_2 g_0 t_4 \chi^1_{1n} + t_1 \chi^2_{1n} + t_1 \chi^3_{1n} + t_2 \chi^1_{1n} + t_2 g_0 t_4 \chi^2_{1n} + t_2 \chi^3_{1n} + t_3 g_0 \chi^1_{1n} + t_3 \chi^2_{1n} + t_3 g_0 t_4 \chi^3_{1n}). \tag{IV.2.18}$$

Für den Fall eines kompakten und separablen Potentials V_4 im Raum der Drei-Cluster-Koordinaten kann man t_4 sofort angeben: Wenn V_4 durch unser Drei-Cluster-Resonanzpotential

$$V_4 = V_4^c = F^*(E;\vec{\eta}',\vec{q}') \frac{1}{\langle f | H - E | f \rangle} F(E;\vec{\eta}',\vec{q}') \tag{IV.2.19}$$

gegeben ist, dann erhalten wir für t_4:

$$t_4 = F^*(E;\vec{p}_1,\vec{p}_2)\ \frac{1}{\langle\varphi|H-E|\varphi\rangle - \langle F|g_0(E_{rel})|F\rangle}\ F(E;\vec{p}_1,\vec{p}_2). \qquad \text{(IV.2.20)}$$

Man beachte hierbei, daß der Operator t_4 im Gegensatz zu t_1, t_2 und t_3 kein Zwei-, sondern ein Drei-Teilchen-Operator ist (siehe auch §A.3) Dabei ist H der mikroskopische Hamiltonoperator und $E_{rel} = E - |\varepsilon_1| - |\varepsilon_2| - |\varepsilon_3|$.

Gleichung (IV.2.17) zeigt, daß im allgemeinen auch dann, wenn für die Resonanzenergien für die der Nenner des Operators t_4 sehr groß wird, die außerdiagonalen Terme t_1, t_2 und t_3 wegen ihrer Kopplungsfunktion und der kinematischen Verhältnisse nicht vernachlässigt werden können. Gleichung (IV.2.17) zeigt explizit, daß der Einfluß der Zwei-Teilchen-Potentiale vielfältig ist. Einmal modifizieren sie direkt den Sudden-Break-Up-Terfall des Drei-Teilchen-Systems (Operatorprodukte in den Diagonalelementen), und zum anderen sorgen sie für weitere Modifikationen durch die Kopplung der restlichen Komponenten der Wellenfunktion (Außerdiagonalelemente). Die Tatsache, daß die Operatoren t_1, t_2 und t_3 jeweils auf andere Komponenten der Streufunktion wirken als der Operator t_4 (siehe (IV.2.17)), macht den direkten Vergleich der Wirkungsweisen der vier Operatoren hinfällig und jede ad hoc Approximation (auch für Energien in der Nähe der Resonanzenergie) fragwürdig. Eine solche Argumentation würde auf den ersten Blick aus der Perspektive der Gleichung (IV.2.18) als gerechtfertigt erscheinen. Hier könnte man beispielsweise $t_2 x^1_{1n}$ gegenüber $t_1 g_0 t_4 x^1_{1n}$ vernachlässigen. Es ist allerdings wichtig festzuhalten, daß Gl.(IV.2.18), die aus der Summation der Komponenten der Gl.(IV.2.17) hervorgeht, nur dann einen Sinn hat, wenn Gl. (IV.2.17) zuvor bereits gelöst worden ist. (IV.2.18) selbst ist keine Bestimmungsgleichung für die Komponenten x^1_{1n}, x^2_{1n} und x^3_{1n}. Mit anderen Worten,die Reihenfolge a) Lösung des Gleichungssystems (IV.2.17),b) Summation der Komponenten von (IV.2.17) darf nicht vertauscht werden.

Zum Schluß geben wir eine andere Lösungsmethode an, die im folgenden ausführlich diskutiert werden wird. Unter der Annahme, daß das Drei-Teilchen-Problem ohne das Potential V_4 gelöst worden ist, werden wir die endgültigen T-Matrizen unter dem Einfluß des Resonanzpotentials aus der asymptotischen Gestalt der Greensoperatoren ablesen können. Zunächst definieren wir folgende Resolventen

$$G(z) = (z - h_0 - V_1 - V_2 - V_3)^{-1} \qquad \text{(IV.2.21)}$$

$$G(z) = (z - h_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4^c)^{-1} . \qquad \text{(IV.2.22)}$$

Die Resolventengleichung, die beide Resolventen $\mathcal{G}(z)$ und $G(z)$ verknüpft, lautet

$$G(z) = \mathcal{G}(z) + G(z) V_4^c \mathcal{G}(z) . \qquad \text{(IV.2.23)}$$

Nehmen wir an, daß wir die Lösung χ_1 des Dreiteilchenystems ohne das Resonanzpotential V_4^c bei vorgegebenen Anfangszustand ϕ_1 schon kennen :

$$|\chi_1^+\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon \, \mathcal{G}(E+i\varepsilon)|\phi_1\rangle . \qquad \text{(IV.2.24)}$$

Dann lautet die gesamte Lösung χ_{c1}^+ bei Anwesenheit des Resonanzpotentials unter der Verwendung von Resolventengleichung (IV.2.23):

$$|\chi_{c1}^+\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon \, G(E+i\varepsilon)|\phi_1\rangle = |\chi_1^+\rangle + \mathcal{G}(E+i0) V_4^c |\chi_{c1}^+\rangle . \qquad \text{(IV.2.25a)}$$

Gleichung (IV.2.25) ist eindeutig lösbar, weil der Integralkern $\mathcal{G} V_4^c$ kompakt ist, sofern das Potential die Bedingung

$$\int |V_4^c(R,R')|^2 R^5 R'^5 dR' dR < \infty \qquad \text{(IV.2.25b)}$$

erfüllt. Da unser Resonanzpotential separabel und der Formfaktor $|F\rangle$ quadratintegrabel ist, ist die Hilbert-Schmidt-Norm von V_4^c endlich. Damit liegt V_4^c in der Klasse der Drei-Teilchen-Potentiale, die die Bedingung (IV.2.25b) erfüllen. Gleichung (IV.2.25a) können wir unter der Verwendung der Multiplikatorengleichung

$$(1 + \mathcal{G}V)(1 + \mathcal{G}T) = 1 \qquad \text{(IV.2.26)}$$

und dem zur Formel (IV.2.20) entsprechenden Ausdruck für T_4^c ($T_4^c \neq t_4$)

$$T_4^c = |F\rangle \frac{1}{\langle f|H-E|f\rangle - \langle F|G(E_{\omega})|F\rangle} \langle F|$$

(siehe mathematischer Anhang A §A.3) umformen, und erhalten:

$$|\chi_{c4}^+\rangle = |\chi_4^+\rangle + G(E_{\omega}+i0)|F\rangle \frac{\langle F|\chi_4^+\rangle}{\langle f|H-E|f\rangle - \langle F|G(E_{\omega})|F\rangle} . \qquad \text{(IV.2.27)}$$

Diese Formel ist die Verallgemeinerung der von WILDERMUTH-BENÖHR aufgestellten Gleichung für den Zwei-Cluster-Fall (siehe Ref./1/ Seite 152, Gleichung (9.14)).

Kennen wir die Lösung $|\chi_4^+\rangle$ und die asymptotische Gestalt von G in dem Einschußkanal, in den Rearrangement-Kanälen und im Aufbruchs-Kanal, so ist uns auch die Lösung $|\chi_{c4}^+\rangle$ bekannt, und wir können die analytische Struktur der Resonanzamplituden untersuchen. Unter der Annahme, daß wir das Drei-Teilchen-Problem für Zweiteilchenwechselwirkungen bei allen Energien und für alle Randbedingungen lösen können, bleibt die Aufgabe, die asymptotische Gestalt von G unter diesen Bedingungen zu berechnen. Dieser Aufgabe wenden wir uns im nächsten Pragraph zu.

IV.3. Asymptotische Gestalt der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion bei Vorgabe von Zweiteilchenpotentialen

In diesem Paragraph benutzen wir für die Drei-Teilchen-Kinematik die Notation, die wir in Kapitel II definiert haben. Zunächst geben wir einen kurzen Rückblick auf die entsprechenden asymptotischen Formeln im Zwei-Teilchen-Fall. Für $E > 0$ und festes $\vec{r}'$ hat die freie Greensfunktion folgende asymptotische Gestalt:

$$\bar{g}_0(E;\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{iq|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \xrightarrow[|\vec{r}|\to\infty]{} -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{iqr}}{r}\,e^{-iq\vec{r}^0\cdot\vec{r}'}, \qquad \text{(IV.3.1)}$$

dabei ist $q=\sqrt{E}$ und $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

Für die volle Greensfunktion erhalten wir über die Resolventengleichung

$$\bar{g} = \bar{g}_0 + \bar{g}_0 V \bar{g} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

folgende asymptotische Gestalt, sofern das Potential V asymptotisch genügend schnell abfällt:

$$\bar{g}^+(E;\vec{r},\vec{r}') \xrightarrow[\substack{r\to\infty\\ r' \text{ klein}}]{} -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{iqr}}{r}\,\phi^{(-)*}_{k\vec{r}^0}(\vec{r}') \,. \qquad \text{(IV.3.3a)}$$

Hier bedeutet $*$ das konjugiert-komplex Zeichen und $\phi^{(-)}_{k\vec{r}^0}(\vec{r}')$ ist definiert durch

$$\phi^{(-)} = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\,\bar{g}(E-i\varepsilon)\varphi \quad \text{oder} \quad \phi^{(-)}(\vec{q},\vec{r}) = e^{i\vec{q}\vec{r}} + \int d\vec{r}'\,\bar{g}(q;\vec{r},\vec{r}')V(\vec{r}')e^{i\vec{q}\vec{r}'}\,, \qquad \text{(IV.3.3b)}$$

wobei $\varphi(\vec{q},\vec{r}) = e^{i\vec{q}\vec{r}}$ die ebene Welle im Zwei-Teilchen-Fall bedeutet. Zu Gleichung (IV.3.3b) sei noch anzumerken, daß der Limes $\varepsilon\to 0$ nach der Auswertung des Integrals ausgeführt werden muß. Die Formel (IV.3.3a) gilt nur, wenn das Potential V hinreichend schnell abfällt.

Im folgenden geben wir die asymptotische Gestalt der Kanalresolventen, die wir im vorangegangenen Paragraphen dieses Kapitels

eingeführt haben.

$$g_i^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{\eta}_i|\to\infty \\ |\vec{R}|,|\vec{\eta}_i| \text{ klein}}]{} -\frac{1}{4\pi(2\mu_i)^{3/2}} \sum_n \frac{e^{i q_{in}\eta_i}}{\eta_i} \varphi_{in}(\vec{\xi}_i)\Psi^*(\vec{p}_{in}', E_{in}; \vec{R}). \quad \text{(IV.3.4)}$$

Hier sind die einzelnen Größen folgendermaßen definiert:

$$\vec{q}_{in}' = \vec{\eta}_i^0 |\vec{q}_{in}| \quad \text{und} \quad |\vec{q}_{in}| = (E - E_{in})^{1/2}.$$

E_{in} ist die Bindungsenergie des Subsystems (jk) im n-ten gebundenen Anregungszustand, φ_{in} ist die Bindungswellenfunktion dieses Subsystems

$$\Psi_i(\vec{p}_{in}, E_{in}; \vec{R}) = e^{i\vec{p}_{in}\vec{\eta}_i} \varphi_{in}(\vec{\xi}_i). \quad \text{(IV.3.5)}$$

Die asymptotische Formel (IV.3.4) ist dem i-Kanal angepaßt. Wir stellen fest, daß in diesem Fall nur die Subsystembindungszustände eine Rolle spielen, und die Subsystemstreuzustände vernachlässigbar sind. Für den Aufbruchkanal erhalten wir

$$g_i^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} \frac{e^{i\pi/4} E^{3/4}}{2(2\pi)^{5/2}} \frac{e^{iKR}}{R^{5/2}} \Psi_i^{(-)*}(\vec{K}', \vec{R}'). \quad \text{(IV.3.6)}$$

Hier sind die einzelnen Größen folgendermaßen definiert:

$$\Psi_i^{(-)}(\vec{K}',\vec{R}') = e^{i\vec{\eta}_i\vec{p}_i'} \Phi^{(-)}(\vec{q}_i', \vec{\xi}_i),$$

$$\vec{p}_i' = \frac{K}{R}\vec{\eta}_i \quad , \quad \vec{q}_i' = \frac{K}{R}\vec{\xi}_i.$$

Außerdem gilt

$$p'^2 + q'^2 = K^2 = E \quad \text{und} \quad q = (E - p_i^2)^{1/2} \quad i = 1,2,3.$$

Die Formeln (IV.3.6) und (IV.3.7) zeigen, daß im Aufbruchskanal nur die Subsystemzustände einen nichtverschwindenden Beitrag lie-

fern. Damit ist die dem Aufbruch angepaßte asymptotische Gestalt der Kanalresolvente gefunden. Zum Schluß geben wir noch die asymptotische Gestalt der freien Drei-Teilchen-Greensfunktion an

$$g_0(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} \frac{e^{i\pi/4}\,E^{3/4}}{2\,(2\pi)^{5/2}}\;\frac{e^{iKR}}{R^{5/2}}\;e^{-i\vec{K}'\vec{R}'} \qquad \text{(IV.3.8)}$$

Dabei sind $\vec{R}'$ und $\vec{K}'$ folgendermaßen definiert

$$\vec{R}' = \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K}' = \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \end{pmatrix} \frac{K}{R} \qquad i = 1,2,3 \,.$$

Formel (IV.3.4) und (IV.3.6) wurden von NEWTON /72-74/ angegeben. Im mathematischen Anhang A geben wir die Ableitung aller Formeln (IV.3.4)-(IV.3.8) an, und gehen jetzt über zu der Untersuchung der Asymptotik der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion.

Daß die Ableitung der asymptotischen Gestalt der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion nicht trivial ist, zeigt folgende Überlegung: Es ist naheliegend, in Analogie zum Zwei-Teilchen-Fall, von folgender Resolventengleichung auszugehen:

$$G = g_i + g_i \bar{V}_i G \qquad \text{(IV.3.9)}$$

und bei Kenntnis der asymptotischen Gestalt von g_i die asymptotische Gestalt von G zu untersuchen. Es entsteht jedoch das Problem, ob die Anwendung der asymptotischen Formeln (IV.3.4) und (IV.3.6) gerechtfertigt ist. Wir haben hier mit Schwierigkeiten zu tun, die auch bei den GLÖCKLE-Gleichungen auftreten. Denn das Pendant zum Zwei-Teilchen-Fall, daß nämlich das Potential im ganzen Raum hinreichend schnell abfällt, ist nicht mehr gewährleistet. In der Formel (IV.3.9) kommen Anteile von allen Kanälen $i = 1,2,3$ vor, die in die Gesamtformel nicht additiv eingehen. Ein typischer Term der Gleichung (IV.3.9) hat folgende Form:

$$\int d\vec{R}''\; g_1(\vec{R},\vec{R}'')\,V_2(\vec{y}_2'')\,G(\vec{R}'',\vec{R}'). \qquad \text{(IV.3.10)}$$

Man erkennt sofort, daß die Konvergenz der Integration über $\vec{\eta}''$ nicht von vornherein gewährleistet ist - ein Ausdruck für die Singularität der Lippmann-Schwinger-Gleichungen im Drei-Teilchen-Fall. Wir müssen daher prüfen, ob wir die Formeln (IV.3.4) und (IV.3.6) im Zusammenhang mit der Resolventenidentität für die volle Drei-Teilchen-Greensfunktion benutzen dürfen.
Zunächst untersuchen wir den Fall der Zwei-Körper-Kanäle. Die Betrachtung der Formel (IV.3.5) lehrt uns, daß $\vec{\rho}_1''$ "klein" ist, denn diese Koordinate wird durch die Bindungsfunktion $\varphi_{1n}(\vec{\rho}_1')$ "abgeschnitten". Der Formel (IV.3.10) entnehmen wir, daß $\vec{\rho}_2''$ "klein" ist, denn diese Koordinate wird durch das Potential V_2 "abgeschnitten", vorausgesetzt, daß das Potential hinreichend schnell abfällt. Aus den Beziehungen zwischen den Koordinaten verschiedener Subsysteme (siehe Gleichung (II.2.6a)) ergibt sich, daß wenn $\vec{\rho}_1''$ und $\vec{\rho}_2''$ gleichzeitig fixiert sind, damit auch $\vec{R}''=(\vec{\eta}_i'', \vec{\rho}_i'')$ $i=1,2,3$ fixiert ist. Mithin ist die Verwendung der asymptotischen Form der Kanalresolvente im Zusammenhang mit der Gleichung (IV.3.9) gerechtfertigt. Man erkennt leicht aus (IV.3.6) und explizit aus (IV.3.7), daß diese Argumente im Falle des Aufbruchs bezüglich der Koordinate $\vec{\rho}_1''$ hinfällig sind. Damit ist die Anwendung der Formel(IV.3.6) im Kontext der Resolventengleichung (IV.3.9) fragwürdig. Dieses Verfahren wurde jedoch von NEWTON und SHTOKHAMER /72-74/ und /90/ verwendet, wurde allerdings später unter anderem von POTAPOV und TAYLOR als unbefriedigend kritisiert /91-92/.

Man wird also zunächst nach einer Resolventengleichung suchen müssen, die solchen Argumenten standhält. Man weiß, daß die asymptotische Form der Wellenfunktion im Drei-Teilchen-Fall von der Richtung in dem sechs-dimensionalen Koordinatenraum abhängt. Dasselbe muß natürlich auch für die volle Greensfunktion des Drei-Teilchen-Systems gelten. Man weiß darüberhinaus, daß die Drei-Teilchen-Wellenfunktion durch die FADDEEV-Komponenten und die zugehörigen Gleichungen korrekt dargestellt wird. Wir werden daher eine der FADDEEV-Aufspaltung angepasste Resolvente herleiten, und bevor wir sie auf ihre asymptotische Gestalt hin untersuchen, werden wir die Kompaktheit der Kerne prüfen müssen. Wir betrachten zunächst folgende Resolventengleichungen:

$$G = g_1 + g_1 \bar{V}_1 G \qquad \text{(IV.3.11)}$$

$$G = g_1 + g_1 \bar{V}_1 G$$
$$G = g_3 + g_3 \bar{V}_3 G , \qquad \text{(IV.3.11)}$$

verwenden den FADDEEV-Multiplikationstrick für Wellenfunktionen, indem wir jede der Gleichungen (IV.3.11) mit $g_0 V_i$ multiplizieren und erhalten

$$g_0 V G = g_0 V_1 g_1 + g_0 V_1 g_1 \bar{V}_1 G$$
$$g_0 V_2 G = g_0 V_2 g_2 + g_0 V_2 g_2 \bar{V}_2 G \qquad \text{(IV.3.12)}$$
$$g_0 V_3 G = g_0 V_3 g_3 + g_0 V_3 g_3 \bar{V}_3 G .$$

Berücksichtigen wir die nachstehende zusätzliche (redundante) Resolventengleichung

$$G = g_0 + g_0 (V_1 + V_2 + V_3) G , \qquad \text{(IV.3.13)}$$

dann erhalten wir mit den Gleichungen (IV.3.12) für G

$$G = g_0 + g_0 V_1 g_1 + g_0 V_1 g_1 \bar{V}_1 G + g_0 V_2 g_2 +$$
$$+ g_0 V_2 g_2 \bar{V}_2 G + g_0 V_3 g_3 + g_0 V_3 g_3 \bar{V}_3 G . \qquad \text{(IV.3.14)}$$

Mit Hilfe der beiden Formeln

$$g_0 = g_i - g_0 V_i g_i \qquad \text{(IV.3.15)}$$

und

$$g_0 V_i g_i = g_i V_i g_0 \qquad \text{(IV.3.16)}$$

können wir die Gleichung (IV.3.14) umformen und erhalten

$$G = g_1 (\mathbb{1} + V_1 g_0 \bar{V}_1 G) + g_2 (V_2 g_0 + V_2 g_0 \bar{V}_2 G) +$$

$$+\; g_3 (V_3 g_0 + V_3 g_0 \bar{V}_3 G), \qquad \text{(IV.3.17)}$$

oder zusammengefasst

$$G = \sum_{\alpha=1}^{3} g_\alpha [M_\alpha + V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha G] \qquad \text{(IV.3.18)}$$

mit

$$M_\alpha = \begin{cases} V_\alpha g_0 & \alpha \neq \lambda \\ \mathbb{1} & \alpha = \lambda \end{cases} . \qquad \text{(IV.3.19)}$$

Dabei kann λ beliebig gewählt werden. Wir werden weiter unten im Rahmen der Kompaktheitsdiskussion der Gleichung (IV.3.17) zeigen, daß a) diese Formel mit der FADDEEV-Aufspaltung konsistent ist, und b) die Wahl von λ der Festlegung des Eingangskanales entspricht. Die Willkür in der Wahl von λ kann man sich dadurch verständlich machen, indem man feststellt, daß auf dem Raum der Eigenzustände von g_α^{-1} der Operator $V_\alpha g_0$ dem Operator $\mathbb{1}$ entspricht. In der Formel (IV.3.17) haben wir es mit folgenden Termen zu tun: $g_\alpha V_\alpha$ und $V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha$. Der Term $g_\alpha V_\alpha = t_\alpha g_0$ ist "ungefährlich", denn hier kann die δ-Funktion als Faktor vorgezogen werden. Es handelt sich um Zwei-Teilchen-Streuung eingebettet im Drei-Teilchen-Raum. Dieser Term entspricht dem inhomogenen Term der FADDEEV-Gliechung für die T-Matrizen :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_2 & t_3 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ 0 & t_3 & t_3 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} . \qquad \text{(IV.3.20)}$$

Betrachtet man die graphische Darstellung von typischen Beiträgen zum Kern $V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha$ und entsprechenden Iterationen in Fig.14 und zum Kern der GLÖCKLE-Gleichungen vom Typ (IV.3.10), so sieht man einen wesentlichen Unterschied. Während es in der Lippmann-Schwinger-Gleichung immer ein Teilchen gibt, das an der Wechselwirkung nicht teilnimmt, sind im Kern $V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha$ alle Teilchen durch die Wechselwirkung verbunden.

Fig.14 Typische Beiträge zum Kern a) vom Typ (IV.3.10) und b) vom Typ $V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha$. Die waagerechten Linien stellen die einzelnen Teilchen dar, die Wellenlinien die Wechselwirkung.

Die Kerne vom Typ $V_\alpha g_0 \bar{V}_\alpha$ sind aber genau vom FADDEEV-Typ. FADDEEV hat gezeigt, daß diese "Verbundenheit" aller Teilchen bei genügend rasch abfallendem Potential zu einem kompakten Kern führt. Damit ist gezeigt, daß die Formel (IV.3.17) den geeigneten Ausgangspunkt für die Untersuchung der asymptotischen Gestalt der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion darstellt. Zum Schluß dieser Überlegungen möchten wir die Konsistenz der Formel (IV.3.17) mit der FADDEEV-Aufspaltung der Wellenfunktion in Komponenten zeigen. Diesen Beweis werden wir im mathematischen Anhang B bei der detaillierten Herleitung der asymptotischen Gestalt von G benötigen.

Nehmen wir an, daß Kanal 1 der Eingangskanal ist, und daß gilt:

$$\phi_{1n} = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon \, g_1 (E+i\varepsilon) \, \phi_{1n} \, , \qquad \text{(IV.3.21)}$$

d.h. ϕ_{1n} ist die durchlaufende ebene Welle im Kanal 1, wobei das Subsystem (23) sich im n-ten gebundenen Anregungszustand befindet. Dann führt die Auswertung von

$$\chi^+_{1n} = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon \, G (E+i\varepsilon) \, \phi_{1n} \qquad \text{(IV.3.22)}$$

über die Gleichung (IV.3.17) auf

$$\chi^+_{1n} = \phi_{1n} + g_1 V_1 g_0 (V_2+V_3) \chi^+_{1n} + g_2 V_2 g_0 (V_1+V_3) \chi^+_{1n} + g_3 V_3 g_0 (V_1+V_2) \chi^+_{1n} \, . \qquad \text{(IV.3.23)}$$

Mit den Definitionen (IV.2.12) für die FADDEEV-Komponenten erhält man

$$\chi^{+}_{\alpha n} = \phi_{\alpha n} + g_\alpha V_\alpha \left(\chi^{+2}_{\alpha n} + \chi^{+3}_{\alpha n}\right) + g_\beta V_\beta \left(\chi^{+1}_{\alpha n} + \chi^{+3}_{\alpha n}\right) + g_\gamma V_\gamma \left(\chi^{+1}_{\alpha n} + \chi^{+}_{\alpha n}\right). \quad \text{(IV.3.24)}$$

Erinnert man sich an die Formeln (IV.2.6) und (IV.2.8), so sieht man unmittelbar ein, daß Gleichung (IV.3.24) der FADDEEV-Gleichung für Wellenfunktionen äquivalent ist.

Die Herleitung der asymptotischen Form von G in den verschiedenen Richtungen des sechs-dimensionalen Raumes ist mathematische etwas langwierig, und deshalb im mathematischen Anhang B dargestellt. Hier stellen wir die Endergebnisse zusammen. Für die Subsystemkanäle erhalten wir

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{q}_\alpha|\to\infty \\ |\vec{\eta}_\alpha|,|\vec{R}'| \text{ klein}}]{} -\frac{1}{4\pi (2\mu_\alpha)^{3/2}} \sum_n \left\{ \frac{e^{i q_{\alpha n} \eta_\alpha}}{\eta_\alpha} \varphi_{\alpha n}(\vec{\xi}_\alpha) \right\} \chi^{(-)*}_{\alpha n}(\vec{q}'_{\alpha n}, E; \vec{R}') \quad \text{(IV.3.25)}$$

mit

$$\chi^{(-)}_{\alpha n}(\vec{q}_{\alpha n}, E, \vec{R}) = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E - i\varepsilon) \left\{ e^{i\vec{q}_{\alpha n}\vec{\eta}_\alpha} \varphi_{\alpha n}(\vec{\xi}_\alpha) \right\}. \quad \text{(IV.3.26)}$$

Im Aufbruchskanal stehen uns zwei Formeln zur Verfügung. Die erste (IV.3.27) wird ausgedrückt mit Streufunktionen des Drei-Körper-Systems, die sich aus verschiedenen Anfangszuständen entwickeln, wo alle Teilchen frei sind:

$$G(E,\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein} \\ \alpha \text{ - beliebig}}]{} -\frac{e^{i\pi/4}}{2(2\pi)^{5/2}} \frac{E^{3/4}}{R^{5/2}} e^{iKR} \left[\chi^{(-)*}_0(\vec{u}'_1,\vec{R}') + \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\chi^{(-)*}_\alpha(\vec{u}'_\alpha,\vec{R}') - \chi^{(-)*}_0(\vec{u}'_1,\vec{R}') \right) \right]. \quad \text{(IV.3.27)}$$

Dabei ist

$$\chi^{(-)}_0(\vec{u}'_1,\vec{R}') = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E\, i\varepsilon) \left\{ e^{i\vec{u}'_1\vec{R}'} \right\} \quad \text{(IV.3.28)}$$

und

$$\chi^{(-)}_\alpha(\vec{u}'_\alpha,\vec{R}') = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E - i\varepsilon) \left\{ e^{i\vec{q}'_\alpha\vec{\eta}'_\alpha}\ \phi^{(-)}_\alpha(\vec{p}'_\alpha,\vec{\xi}'_\alpha) \right\}, \quad \text{(IV.3.29)}$$

Dabei sind

$$\vec{R}' = \begin{pmatrix} \vec{r}'_\alpha \\ \vec{y}'_\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K}' = \begin{pmatrix} \vec{q}'_\alpha \\ \vec{p}'_\alpha \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{q}'_\alpha = \vec{r}'_\alpha \cdot q_\alpha$ und $\vec{p}'_\alpha = \vec{y}'_\alpha \cdot p_\alpha$ ($\hat{x}$ bedeutet hier den Einheitsvektor in Richtung $\vec{x}$). Die zweite Formel beschreibt den Aufbruchskanal vermöge der Drei-Teilchen-Übergangsamplitude der frei-frei-Streuung $R^{(-)}_{oo}$:

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} -\frac{e^{i\pi/4}\, E^{3/4}}{2\,(2\pi)^{5/2}}\,\frac{e^{iKR}}{R^{5/2}}\left[e^{-iK\vec{R}^\circ\cdot\vec{R}'} + (2\pi)^{6/4}\int R^{(-)}_{oo}(K\vec{R}^\circ,\vec{K}')\, g_o(\vec{K}',\vec{R}')\, d\vec{K}'\right]. \tag{IV.3.30}$$

Dabei sind die einzelnen Größen folgendermaßen definiert:

$$\text{1)}\quad g_o(\vec{K}',\vec{R}') = \langle \vec{K}' | g_o | \vec{R}' \rangle$$

$$\text{2)}\quad R^{(-)}_{oo}(K\vec{R}^\circ,\vec{K}') = \langle K\vec{R}^\circ | U^{(-)}_{oo} | \vec{K}' \rangle = \langle K\vec{R}^\circ | V + V\, G(\vec{q}'^{\,2}_\alpha + \vec{p}'^{\,2}_\alpha + i0)\, V \,|\, \Phi_o(\vec{K}') \rangle \tag{IV.3.31}$$

$$\text{3)}\quad \langle \Phi_o(\vec{K}) | \vec{R} \rangle = e^{i\vec{K}\vec{R}}$$

$$\text{4)}\quad V = \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha .$$

Die Äquivalenz der Formel (IV.3.27) und (IV.3.30) wird ebenfalls im mathematischen Anhang B bewiesen. Wenn wir die folgende Identität für die Übergangsoperatoren $U^{(-)}_{\alpha\beta}$ beachten

$$U^{(-)}_{oo} = V + VGV = V + \sum_{\alpha=1}^{3} t_\alpha g_o U^{(-)}_{\alpha o}, \tag{IV.3.32}$$

so können wir die frei-frei-Streuamplitude durch Übergangsoperatoren von den Zwei-Körper-Kanälen zu dem Aufbruchskanal

$$U^{(-)}_{\alpha o} = V + \bar{V}_\alpha G V \qquad \text{für } \alpha = 1,2,3 \tag{IV.3.33}$$

beschreiben; man erhält

$$R^{(-)}_{oo}(K\vec{R}^\circ,\vec{K}') = \langle \Phi_o(K\vec{R}^\circ) | V | \Phi_o(\vec{K}') \rangle + \sum_{i=1}^{3} \left[\langle \tilde{\Phi}_i(K\vec{R}^\circ) | U^{(-)}_{io} | \Phi_o(\vec{K}') \rangle \right], \tag{IV.3.34}$$

dabei ist $|\tilde{\phi}_i\rangle$ folgendermaßen definiert

$$|\tilde{\phi}_i\rangle = |\phi_i\rangle - |\phi_o\rangle , \qquad \text{(IV.3.35)}$$

wobei $|\phi_i\rangle$ den Streuzustand im Subsystem i und das Zuschauerteilchen durch eine ebene Welle beschreibt

$$|\phi_i\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} i\varepsilon \, g_i(E+i\varepsilon)|\phi_o\rangle . \qquad \text{(IV.3.36)}$$

Eine detaillierte Ableitung der Formel (IV.3.34) findet man im Anhang B. Die abgeleiteten asymptotischen Formeln für die volle Drei-Teilchen-Greensfunktion sind in der Auswertung der Gleichung (IV.2.7) nur dann erlaubt und vom Nutzen, wenn das Potential V_4^C ein Drei-Teilchen-Potential ist, das bezüglich der Koordinaten $\vec{R}$ und $\vec{R}'$ genügend rasch abfällt, d.h. mindestens der Bedingung (IV.2.27b) genügt. Nur dann ist nämlich die Einschränkung gerechtfertigt, daß $|\vec{R}'|$ klein sein soll, da $|\vec{R}'|$ in einem solchen Fall durch das Potential "abgeschnitten" wird. Damit ist es klar, daß die in diesem Paragraphen vorgestellte Eliminationsmethode scheitert, sofern wir V_4^C durch ein beliebiges Zwei-Teilchen-Potential ersetzen. Folglich können Subsystemresonanzen mit dieser Methode nicht beschrieben werden. Bei den Drei-Teilchen-Compoundresonanzen ist diese Methode aber erfolgreich.

Zum Schluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß die asymptotische Gestalt der Wellenfunktion $|\chi_m^+\rangle$ in der Gleichung (IV.2.29) von vielen Autoren wie NUTALL, NEWTON, GIGNOUX, LAVERNE, MERKURIEV, POTAPOV und TAYLOR studiert worden ist, und die Streuamplituden unmittelbar aus den angegebenen Formeln abzulesen sind. Die Struktur des zweiten Terms in (IV.2.29), d.h. den Einfluß der Drei-Teilchen-Compoundresonanz auf alle Zwei-Körper-Kanäle und den Aufbruch untersuchen wir im nächsten Paragraphen. Es ist klar, daß diese Resonanzamplituden mit den Streuamplituden, die von $|\chi_{4n}^+\rangle$ herrühren, miteinander interferieren.

IV.4. Einfluß der Drei-Teilchen-Compoundresonanz auf die Kanäle des Drei-Teilchen-Systems

Wir beginnen mit der Diskussion der Struktur der Resonanzamplitude im Aufbruchskanal, der unser hauptsächliches Interesse gilt. Die Diskussion verläuft paralell zu der WILDERMUTH -BENÖHR'schen Untersuchung im Zwei-Teilchen-Fall. Der enzige gewichtige Unterschied liegt in der Auswertung des Real- und Imaginärteiles der vollen Drei-Teilchen-Greensfunktion G. Die Resonanzamplitude im Aufbruchskanal läßt sich mit Hilfe der Gleichung (IV.2.29) und wahlweise (IV.3.27) oder (IV.3.30) folgendermaßen implizit angeben:

$$\chi^{+}_{1c}(\vec{p}_1, E_1; \vec{R}) \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty]{} \frac{e^{iKR}}{R^{5/2}}\left[R_{01}(\vec{K}; \vec{p}_1, E_1) + R^{res}_{01}(\vec{K}; \vec{p}_1, E_1)\right]. \qquad (IV.4.1)$$

R_{01} ist die Aufbruchsamplitude des Drei-Teilchen-Systems in Abwesenheit des Resonanzpotentials und ist gegeben durch

$$R_{01}(\vec{K}; \vec{p}_1, E_1) = \frac{e^{i\pi/4}\, E^{3/4}}{2\,(2\pi)^{5/2}} \int d\vec{R}\; e^{-\vec{K}\vec{R}} \times \sum_{j\neq 1} V_j(\vec{\xi}_j)\, \chi^{(+)}_1(\vec{p}_1, E_1; \vec{R}). \qquad (IV.4.2)$$

Die Resonanzamplitude ist gegeben durch

$$R^{res}_{01}(\vec{K}; \vec{p}_1, E_1) = \frac{e^{i\pi/4}\, E^{3/4}}{2\,(2\pi)^{5/2}} \frac{\langle \chi^{(+)}_0 + \sum_\alpha (\chi^{(+)}_\alpha - \chi^{(+)}_0) | F\rangle \langle F | \chi^{(+)}_1\rangle}{\langle f | H - E | f\rangle - \langle F | G(E_{res}) | F\rangle}. \qquad (IV.4.3)$$

Vollständigkeitshalber geben wir die entsprechenden Formeln für den Eingangskanal und für die Rearrangement-Kanäle an:

$$\chi^{+}_1(\vec{p}_1, E_1; \vec{R}) \xrightarrow[\substack{|\vec{r}_1|\to\infty \\ |\vec{r}_n| \text{ klein}}]{} e^{i\vec{p}_1\vec{r}_1}\varphi(E_1; \vec{r}_1) - \frac{m_1\,(2/\hbar\omega_0)^{3/2}}{\hbar_1} \sum_n e^{ip'_{1n}r_1}\varphi_n(\vec{\xi}_1)\left[R_{11}(p'_{1n}\vec{r}_1, E_{1n}; \vec{p}_1, E_1) + R^{res}_{11}(p'_{1n}\vec{r}_1, E_{1n}; \vec{p}_1; E_1)\right], \qquad (IV.4.4)$$

wobei $p'^2_{1n} = (E - E_{1n})^{1/2}$. Die Amplituden R_{11} und R^{res}_{11} sind folgendermaßen definiert:

$$R_{11}(p'_{1n}\hat{r}'_1, E_{1n}; \hat{p}_1, E_1) = -\frac{\bar{\mu}_1^{4/2}}{16\pi^3 m_1 \mu_1^{3/2}} \int d\vec{R}\, e^{-i\vec{p}_1\vec{R}}\, \varphi^*_{1n}(\vec{\xi}_{1n}) \sum_{j\neq 1} V_j(\xi_j)\, \chi_1^+(\vec{p}_1, E_1; \vec{R}) \qquad \text{(IV.4.5)}$$

und

$$R^{res}_{11}(p'_{1n}\hat{r}'_1, E_{1n}; \hat{p}_1, E_1) = -\frac{\bar{\mu}_1^{4/2}}{16\pi^3 m_1 \mu_1^{3/2}} \cdot \frac{\langle \chi_1^{(-)} | F\rangle \langle F | \chi_{1n}^{(+)}\rangle}{\langle f|H-E|f\rangle - \langle F|G(E_{rel})|F\rangle} \cdot \qquad \text{(IV.4.6)}$$

Und schließlich für die Rearrangement -Kanäle $\alpha=2,3$:

$$\chi_1^+(\vec{p}_1, E_1; \vec{R}) \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty]{} \frac{m_\alpha (2/\bar{\mu}_\alpha)^{3/2}}{\eta_\alpha} \sum_n e^{i p'_{\alpha n}\eta_\alpha}\, \varphi_n(\vec{\xi}_{\alpha n}) \Big[R_{1\alpha}(p'_{\alpha n}\hat{r}''_\alpha, E_{\alpha n}; \hat{p}_1, E_1) + \qquad \text{(IV.4.7)}$$

$$+ R^{res}_{1\alpha}(p'_{\alpha n}\hat{r}''_\alpha; E_{\alpha n}; \hat{p}_1, E_1)\Big].$$

Die Amplituden $R_{1\alpha}$ und $R^{res}_{1\alpha}$ sind gegeben durch:

$$R_{1\alpha}(p'_{\alpha n}\hat{r}''_\alpha; E_{\alpha n}; \hat{p}_1, E_1) = -\frac{\bar{\mu}_\alpha^{4/2}}{16\pi^3 m_\alpha \mu_\alpha^{3/2}} \int d\vec{R}\, e^{-i\vec{p}'_{\alpha n}\vec{\eta}_\alpha}\, \varphi^*_{\alpha n}(\vec{\xi}_{\alpha n}) \sum_{j\neq\alpha} V_j(\vec{\xi}_j)\, \chi_1^+(\vec{p}_1, E_1, \vec{R}) \qquad \text{(IV.4.8)}$$

und

$$R^{res}_{1\alpha}(p'_{\alpha n}\hat{r}''_\alpha; E_{\alpha n}; \hat{p}_1, E_1) = -\frac{\bar{\mu}_\alpha^{4/2}}{16\pi^3 m_\alpha \mu_\alpha^{3/2}} \cdot \frac{\langle \chi_\alpha^{(-)} | F\rangle \langle F | \chi_{1n}^{(+)}\rangle}{\langle f|H-E|f\rangle - \langle F|G(E_{rel})F\rangle} \cdot \qquad \text{(IV.4.9)}$$

Formeln (IV.4.2), (IV.4.5) und (IV.4.8) haben wir der Ref./71/ (NEWTON) entnommen. Auch andere ,bereits erwähnte Autoren wie NUTALL, GIGNOUX, LAVERNE und MERKURIEV haben entsprechende Formeln für die Streuamplituden des Drei-Teilchen-Systems in Abwesenheit einer Dreikörperkraft abgeleitet, die wir ebenso hier hätten verwenden können.

Im Anschluß an NEWTON /71/ geben wir nachstehend die korrespondierenden Streuquerschnitte an:

i) für den Eingangskanal $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{p'_{1n}}{p_1}\right) \left| R_{nn} + R^{res}_{nn} \right|^2 \qquad \text{(IV.4.10a)}$$

ii) für Rearrangement-Kanäle $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{p'_{\alpha n}}{p_1}\right)\left(\frac{m_1 \bar{\mu}_{\alpha\alpha}^{4/2}}{m_\alpha \bar{\mu}_1^{4/2}}\right) \left| R_{1\alpha} + R^{res}_{1\alpha} \right|^2 \qquad \text{(IV.4.10b)}$$

iii) für den Aufbruch $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\bar{\mu}_1 p_2'^3}{2^{5/2} m_n^2 \mu_1^{3/2} p_1 K^5}\right) |R_{10} + R_{10}^{rest}|^2 (dq_1')$.

(IV.4.10c)

Im folgenden sind für uns Ausdrücke wie

$$\frac{\langle \chi_2^{(-)} | F \rangle \langle F | \chi_{1n}^+ \rangle}{\langle f | H - E | f \rangle - \langle F | G(E+i\eta) | F \rangle}$$

und besonders (IV.4.11)

$$\frac{\langle \chi_0^{(-)} + \sum_\alpha (\chi_\alpha^{(-)} - \chi_0^{(-)}) | F \rangle \langle F | \chi_{1n}^+ \rangle}{\langle f | H - E | f \rangle - \langle F | G(E+i\eta) | F \rangle}$$ vom Interesse.

Wir definieren E_c^1 durch $\langle f | H | f \rangle = E_c^1$. Für die Resolvente G^+ benutzen wir folgende Spektraldarstellung

$$G^+(E) = \sum_\nu \frac{|\chi_\nu\rangle\langle\chi_\nu|}{E - E_\nu} + \sum_{\beta,n} \int d^3q_\beta \frac{|\chi_{\beta n}^+\rangle\langle\chi_{\beta n}^+|}{E - E_{\beta n} - q_\beta^2 + i0^+} +$$

$$+ \iint d^3q\, d^3p \frac{|\chi_0^+\rangle\langle\chi_0^+|}{E - p^2 - q^2 + i0^+} \equiv \sum_\kappa \frac{|\chi_\kappa\rangle\langle\chi_\kappa|}{E - E^\kappa + i0^+} . \qquad \text{(IV.4.12)}$$

χ_ν sind Bindungszustände des Drei-Teilchen-Systems, $\chi_{\beta n}^+$ sind Streuzustände, die sich aus den Zwei-Körper-Kanälen entwickelt haben, und χ_0^+ haben sich aus einem Zustand entwickelt, wo alle Teilchen frei waren. Die Beziehung (IV.4.12) nennt man aysmptotische Vollständigkeit. Daneben gibt es noch weitere Spektraldarstellungen von

$$G^+(E) = \sum_n d^3q_\beta \frac{|\vec{q}_\beta\rangle|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\langle\vec{q}_\beta|}{E - E_{\beta n} - q_\beta^2 + i0^+} +$$

$$+ \iint d^3q_\beta\, d^3p_\beta \frac{|\vec{q}_\beta\rangle|\phi_\beta^+\rangle\langle\phi_\beta^+|\langle\vec{q}_\beta|}{E - p^2 - q^2 + i0^+} \qquad \text{(IV.4.13)}$$

($\beta = 1,2,3$ beliebig, φ_n sind Subsytembindungszustände und ϕ_β^+ Subsystemstreuzustände), die wir hier nur erwähnen. Im Prinzip können wir die Spektraldarstellungen (IV.4.13) zur Untersuchung von (IV.4.11) heranziehen; dies hat keinen Einfluß auf die Definition der Resonanzverschiebung Δ_c (wie erwartet), aber man gelangt mit (IV.4.13) zu einer anderen Aufspaltung der partiellen Resonanzbreiten (siehe

Diskussion weiter unten). Wir führen folgende Definitionen ein. Die komplexe Niveauverschiebung $\Delta^{(+)}$ ist durch das folgende Integral gegeben:

$$\Delta^{(+)} = \sum_{\kappa} \frac{\langle F|\chi^{\kappa}\rangle\langle\chi_{\kappa}|F\rangle}{E - E^{\kappa} + i0^{+}} \quad , \qquad \text{(IV.4.14)}$$

außerdem

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{1n}^{+}(E) &= \langle F|\chi_{1n}^{+}(E)\rangle \\ \Gamma_{\alpha m}^{\pm}(E) &= \langle F|\chi_{\alpha m}^{\pm}(E)\rangle \quad \alpha = 1,2,3 \; ; \; m \geq 0 \\ \Gamma_{\alpha 0}^{\pm}(E) &= \langle F|\chi_{\alpha}^{\pm}(E)\rangle \quad \alpha = 1,2,3 \\ \Gamma_{0}^{\pm}(E) &= \langle F|\chi_{0}^{\pm}(E)\rangle \; . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.4.15)}$$

Die Aufspaltung der komplexen Niveauverschiebung $\Delta^{(+)}$ in Real- und Imaginärteil kann man gewinnen, indem man die Resolvente G^{+} in einen hermiteschen und einen antihermiteschen Operator aufspaltet:

$$G^{+}(E) = G^{+P}(E) + i\pi\,\bar{G}(E) =$$

$$= \sum_{\nu} \frac{|\chi_{\nu}\rangle\langle\chi_{\nu}|}{E - E_{\nu}} + \sum_{\beta,n} \int P\, \frac{|\chi_{\beta n}^{+}\rangle\langle\chi_{\beta n}^{+}|}{E - E_{\beta n} - q^{2}_{\beta}} + \iint P\, \frac{|\chi_{o}^{+}\rangle\langle\chi_{o}^{+}|}{E - p^{2} - q^{2}} +$$

$$+ i\pi \left(\sum_{\beta} \int |\chi_{\beta n}^{+}\rangle\langle\chi_{\beta n}^{+}|\, \delta(E - E_{\beta n} - q^{2}_{\beta})\, d\,q^{2}_{\beta} \; + \right.$$

$$\left. + \iint |\chi_{o}^{+}\rangle\langle\chi_{o}^{+}|\, \delta(E - p^{2} - q^{2})\, d^{3}p\, d^{3}q \right) , \qquad \text{(IV.4.16)}$$

wobei P die Operation des Hauptwerts bedeutet. Damit können wir die komplexe Niveauverschiebung folgendermaßen schreiben:

$$\Delta^{+}(E) = \Delta_{c}(E) + i\pi \left(\sum_{\beta n} \bar{\Gamma}_{\beta n}^{+}(E - E_{\beta n})\, \Gamma_{\beta n}^{+}(E - E_{\beta n}) + \int \bar{\Gamma}_{o}^{+}(E - q^{2})\, \Gamma_{o}^{+}(E - q^{2})\, d^{3}q \right)$$

(IV.4.17)

(diese Formel erhält man, indem man systematisch den Real- und Imaginärteil auswertet; hierbei haben wir die Spektralzerlegung (IV.4.12) verwendet). Damit können wir den Ausdruck (IV.4.11b) auf folgende Form bringen

$$\frac{\langle \chi_o^{(-)} + \sum_\alpha (\chi_\alpha^{(-)} - \chi_o^{(-)}) | F \rangle \langle F | \chi_{1m}^{+} \rangle}{\langle f | H - E | f \rangle - \langle F | G(E_{rel}) | F \rangle} =$$

$$= \frac{\left(\sum_\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha o}^{-}(E') - 2\,\bar{\Gamma}_{o}^{-}(E') \right) \Gamma_{1m}^{+}(E')}{E_c^1 - E - \Delta_c(E) + i\pi \left(\sum_{p\nu} \bar{\Gamma}_{p\nu}^{*}(E' - E_{p\nu}) \Gamma_{p\nu}^{+}(E' - E_{p\nu}) + \int \bar{\Gamma}_{o}^{+}(E' - q^2)\, \Gamma_{o}^{+}(E' - q^2)\, d^3q \right)} \qquad \text{(IV.4.18)}$$

und entsprechend für

$$\frac{\langle \chi_{\alpha m}^{(-)} | F \rangle \langle F | \chi_{1m}^{+} \rangle}{\langle f | H - E | f \rangle - \langle F | G(E_{rel}) | F \rangle} =$$

$$= \frac{\bar{\Gamma}_{\alpha m}^{-}(E')\, \Gamma_{1m}^{+}(E')}{E_c^1 - E - \Delta_c(E) + i\pi \left(\sum_{p\nu} \bar{\Gamma}_{p\nu}^{*}(E' - E_{p\nu}) \Gamma_{p\nu}^{+}(E' - E_{p\nu}) + \int \bar{\Gamma}_{o}^{+}(E' - q^2)\, \Gamma_{o}^{+}(E' - q^2)\, d^3q \right)} \,, \quad E' = E_{rel} \,. \qquad \text{(IV.4.19)}$$

Die Formeln (IV.4.18) und (IV.4.19) haben die erwünschte Breit-Wigener Struktur. Sie sind Ausgangspunkt für alle praktischen und numerischen Untersuchungen. Die Resonanznergie E_{res} ist bestimmt durch

$$E_c^1 - \Delta_c - E = 0 \,. \qquad \text{(IV.4.20)}$$

Eine scharfe Resonanz liegt vor, wenn Δ_c hinreichend klein ist und die Resonanzbreiten kleiner als Δ_c sind.

Mögliche Zerlegungen der Formeln (IV.4.18) und (IV.4.19) im Zusammenhang mit den Streuamplituden $R_{1\alpha}$ $\alpha = 0,1,2,3$ nach guten Quantenzahlen sollen hier noch zum Schluß angedeutet werden.

Es wird angenommen, daß alle drei Streupartner keinen inneren Drehimpuls besitzen. Dadurch vermeiden wir die Komplikationen, die aus der Kopplung der Drehimpulse folgen, und der Gesamtdrehimpuls des Systems ist durch die relativen Bahndrehimpulse gegeben. Nehmen wir weiter an, daß der "gebundene" Zustand F separiert werden kann in

$$F(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = F_1(\vec{\xi})\, F_2(\vec{\eta}) \,, \qquad \text{(IV.4.21)}$$

und ferner, daß der "gebundene" Zustand $F(\vec{\xi}_\alpha)$ eines Subsytems α ebenfalls keinen inneren Drehimpuls besitzt, so besitzt $F(\vec{\xi}_\alpha, \vec{\eta}_\alpha)$ einen definierten Drehimpuls bezüglich der Koordinate $\vec{\eta}_\alpha$. Unter diesen Voraussetzungen koppelt der Compound-Zustand $F(\vec{\xi}_\alpha, \vec{\eta}_\alpha)$ nur an eine einzelne Partialwelle der Relativwellenfunktion in dem Rearrangement-Kanal α. Dann können wir die Formel (IV.4.19) spezifizieren, indem wir eine Partialwellenzerlegung vornehmen. Das Ergebnis sind Formeln, die die Struktur der von WILDERMUTH und SCHRANNER /17/ abgeleiteten Ausdrücke für die Streuamplituden besitzen, jedoch im Drei-Körper-Fall dank den FADDEEV-Gleichungen exakt sind. Der einzige strukturelle Unterschied besteht darin, daß im Falle des offenen Drei-Teilchen-Kanals (Aufbruch) in die gesamte Resonanzbreite außer der Summe von Γ-Ausdrücken, die von den Rearrangement-Kanälen herrühren, noch ein Integral über die Γ-Breiten des Aufbruchs eingeht. Dieses Integral ist ein Ausdruck dafür, daß man den Drei-Teilchen-Aufbruch als ein Kontinuum von unendlich vielen Kanälen auffassen kann. Jeder Energieverteilung auf die drei Streupartner entspricht ein Kanal. Auf der anderen Seite ist aus der Diskussion der kinematischen Beziehungen im Drei-Körper-System in Kapitel III bekannt, daß jeder Energieverteilung ein Punkt auf der sechs-dimensionalen Sphäre entspricht, und diesem Punkt wiederum ein Satz von fünf eindeutig bestimmten Winkeln. Vergegenwärtigt man sich die WILDERMUTH-SCHRANNER'sche Diskussion des Resonanzverhaltens im Fall von mehreren Zwei-Körper-Kanälen (/1/, Kapitel IX), dann wird es einsichtig, daß die Drei-Teilchen-Resonanz in jedem Aufbruchskanal (= bestimmte Energieverteilung auf die drei Streupartner) höchst unterschiedliches Resonanzverhalten haben kann, da sie von den anderen Aufbruchskanälen beeinflußt wird.

Auch die Resonanzamplitude des Aufbruchs können wir parametrisieren, wenn wir annehmen, daß der Compoundzustand F einen definierten hypersphärischen Drehimpuls besitzt. Dann koppelt er aufgrund der Orthogonalitätsbedingung der hypersphärischen Harmonics (siehe die umfassende Untersuchung von FABRE DE LA RIPELLE /75/) nur an eine hypersphärische Partialwelle der Relativwellenfunktion im Aufbruchskanal. Es muß allerdings zugegeben werden, daß diese Annahme ziemlich unphysikalisch ist, denn der hypersphärische Drehimpuls ist keine gute Quantenzahl.

Zum Schluß sei noch angemerkt, daß man die Formeln (IV.4.18) und

(IV.4.19) mit denselben Argumenten und denselben Voraussetzungen (Näherungen), wie es WILDERMUTH und seine Mitarbeiter getan haben, für solche Fälle anwenden und verallgemeinern kann, wo mehr als drei Rearrangement-Kanäle und/oder mehr als ein Drei-Körper-Kanal (hier gemeint als jeweiliges Kontinuum eines bestimmten Drei-Körper-Aufbruchs) vorliegen. Ebenso ist eine Fortführung der erwähnten Formeln für den Fall von zwei und mehr Resonanzen möglich. Die Begründung dieser Fortführung würde lediglich auf eine Repetition der Überlegungen führen, die WILDERMUTH und TANG in Ref./1/ (Kapitel IX) dargelegt haben.

V. Pauli-Resonanzen im Zwei-Cluster-System

V.1. Einführung

Zu einem der großen Erfolge der Resonating-Group-Methode /1/ gehört die uneingeschränkte und korrekte Behandlung des Pauli-Prinzips. Das Pauli-Prinzip manifestiert sich besonders deutlich in dem Spektrum des Normkerns: Eigenzustände des Normkerns zu den Eigenwerten 1 beschreiben gänzlich Pauli-verbotene Relativzustände der wechselwirkenden Cluster, Eigenzustände mit Eigenwerten kleiner als Eins sind nur partiell Pauli-verbotene Zustände der Relativbewegung. Die Eigenwerte gleich Eins treten nur in dem sogenannten Oszillatorgrenzfall auf, d.h. wenn die Cluster durch Grundzustände des Oszillatorschalenmodells beschrieben werden und wenn die Oszillatorbreiten beider Cluster gleich sind.

Realistische Rechnungen mit ungleichen oder gar mehreren Oszillatorbreiten sind aus rechentechnischen Gründen in den meisten Fällen nicht durchführbar. Die gänzliche Pauli-Verbotenheit eines Zustandes oder - wie man auch dazu sagt - die Redundanz des Zustandes äußert sich in der Orthogonalitätsbedingung der Streufunktion und des redundanten Zustandes. Man hat /76/ beobachtet, daß diese Orthogonalitätseigenschaft die Lage der Knoten der Streu-Funktion im Innenbereich - und zwar unabhängig von der Energie -, mit anderen Worten, ihr Off-Shell-Verhalten festlegt. Es war klar, daß jede korrekte effektive Clusterwechselwirkung die redundanten Zustände aus dem Spektrum der Streufunktion auf irgendeine Weise zu eliminieren hat.

Im Jahre 1969 hat Saito /77/ ein Potential und ein zugehöriges Modell, das sogenannte Orthogonality Condition Model, vorgeschlagen, das eine Streufunktion definiert, die automatisch orthogonal zu den redundanten Zuständen ist. Das Saito Modell läßt sich am leichtesten aus dem Prinzip der Lagrange'schen Multiplikatoren ableiten. Nehmen wir an, daß wir folgende Schrödingergleichung lösen wollen:

$$(E - H_o - V_D)\, u = 0 \qquad \text{(V.1.1)}$$

unter der Zusatzbedingung, daß

$$\langle u | u_i \rangle = 0 \qquad i = 1, \ldots, R \qquad \text{(V.1.2)}$$

Um dieses Problem geschlossen zu lösen, benutzen wir das Variationsprinzip und gelangen zu der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$(E - H_0 - V_D)\,u = \sum_{\alpha=1}^{R} c_\alpha u_\alpha \,. \qquad \text{(V.1.3)}$$

Die Lagrange'schen Multiplikatoren sind durch die Orthogonalitätsbedingung (V.1.2) bestimmt und man erhält für sie:

$$c_\alpha = -\langle u_\alpha | H_0 + V_D | u \rangle \quad , \quad \alpha = 1, \ldots, R \,. \qquad \text{(V.1.4)}$$

Das Saito Orthogonality Condition Model lautet somit

$$\left(H_0 + V_D - E - \sum_{\alpha=1}^{R} |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\,(H_0 + V_D)\right)|u\rangle = 0 \,. \qquad \text{(V.1.5)}$$

Hier haben wir angenommen, daß R redundante Zustände vorliegen. Aus der Gleichung (V.1.5) geht hervor, daß die redundanten Zustände Lösungen der Schrödingergleichung (V.1.5) bei Energie E=0 sind.

Eine andere Möglichkeit, wie man die redundanten Zustände behandeln kann, wurde von der russischen Gruppe KUKULIN, POMERANTSEV, KRASNOPOLSKY und NEUDATCHIN /78-81/ aufgezeigt. Ihr Verfahren wird mit der Bezeichnung "orthogonale Projektionsmethode" firmiert und geht auf eine Idee von SCHMID und BANG /82/ zurück. Die oben angeführten russischen Autoren heben hervor, daß ihre Methode zweierlei leistet:Sie behandelt die gänzlich Pauli-verbotenen Zustände ebenso korrekt wie das Saito Modell, aber sie verbessert darüber hinaus das Konvergenzverhalten der Born'schen Reihen erheblich, besonders im Niederenergiebereich bei Anwesenheit eines Bindungs-Zustandes. Diese Methode wurde von den zuvor erwähnten Autoren ebenfalls in Dreikörperrechnungen mit Erfolg angewendet. Die orthogonale Projektionsmethode geht von demselben Ausgangspunkt wie das Saito-Verfahren aus, d.h. von den Gleichungen (V.1.1) und (V.1.2). Die Lösung des Problems ist dann gegeben durch (wir beschränken uns auf den Fall R=1; die Verallgemeinerung auf mehrere redundante Zustände ist dann evident) den Hamiltonoperator:

$$\tilde{H} = H_0 + V_D + \lambda\Gamma \quad , \quad \Gamma = |u_1\rangle\langle u_1| \,, \qquad \text{(V.1.6)}$$

wobei bei der Berechnung der Streufunktion der Limes $\lambda \to \infty$ ausgeführt werden muß. Der Term $\lambda\Gamma$ trägt den Namen: Orthogonalizing Pseudopotential. Bezeichnen wir die zu H gehörige Streulösung mit $|\tilde{u}\rangle$, so erhalten wir für sie folgende Lippmann-Schwinger-Gleichung :

$$\tilde{u} = u + c(\lambda) G(E) |u_1\rangle \,. \qquad \text{(V.1.7)}$$

u ist die Lösung des Problems $(H_o + V_D - E) = 0$ mit der richtigen Anfangsbedingung und $G(E) = (E - H_o - V_D)^{-1}$.
Für die Konstante $c(\lambda)$ erhält man

$$c(\lambda) = \lambda \langle u_1|u\rangle \left(1 - \lambda \langle u_1|G(E)|u_1\rangle\right)^{-1} \,. \qquad \text{(V.1.8)}$$

Die Beimischung des Zustands $|u_1\rangle$ in der Lösung $\tilde{u}$ beträgt mithin

$$\langle u_1|\tilde{u}\rangle = \langle u_1|u\rangle \left(1 - \lambda \langle u_1|G(E)|u_1\rangle\right)^{-1} \qquad \text{(V.1.9)}$$

Für $\lambda \to \infty$ erhalten wir

$$c(\lambda) = - \langle u_1|u\rangle / \langle u_1|G(E)|u_1\rangle \,, \quad \lambda \to \infty \,,$$

das heißt $\lim_{\lambda\to\infty} \langle u_1|\tilde{u}\rangle = 0$ und somit ist der Zustand $|u_1\rangle$ rigoros aus dem Lösungsspektrum $|\tilde{u}\rangle$ herausprojiziert. Die endgültige Form des Orthogonalizing Pseudopotential Modells lautet:

$$\tilde{u} = u - \frac{G\Gamma u}{\Gamma G \Gamma} \,. \qquad \text{(V.1.10)}$$

Weitere Untersuchungen der Integralkerne der Lippmann-Schwinger-Gleichungen zu den Hamiltonoperatoren $H = H_o + V_D$ und $\tilde{H} = H + \lambda\Gamma$ zeigt, daß der Kern der mit Orthogonalizing Pseudopotential modifizierten Lippmann-Schwinger-Gleichung eine kleinere Norm hat als der Kern der ursprünglichen Lippmann-Schwinger-Gleichung. Daraus leiten sich die - eingangs erwähnten - verbesserten Konvergenzeigenschaften der Born'schen Reihen im Niederenergiebereich ab. Das hängt unmittelbar damit zusammen, daß die redundanten Zustände im Orthogonalizing-Pseudopotential-Modell Bindungszustände der zu $\tilde{H}$ gehörenden Schrödingergleichung bei Energie $E = \infty$ sind.

Im Großen und Ganzen ging jedoch die Orthogonalizing Pseudopotential-Methode nicht wesentlich über das Saito Modell hinaus und ist

überdies einer Methode von SCHMID und ZIEGELMANN /82,83/ äquivalent, bei der die Pauli-verbotenen Zustände zu Positive Energy Bound States bei beliebiger Energie gemacht werden können.

All diesen Methoden haftet jedoch die Schwäche an, daß sie außerstande sind die partiell Pauli-verbotenen Zustände adäquat zu behandeln. Der Einfluß dieser Zustände wird bei diesen Methoden vernachlässigt. Dies ist auch erlaubt , solange man sich auf solche Zweikörpersysteme beschränkt, wo der noch am stärksten partiell Pauli-verbotene Zustand immerhin noch mit einem geringen Prozentsatz verboten ist, wie beispielsweise in der α-α-Steuung. Sind partiell Pauli-verbotene Zustände etwa zu 80% oder zu 90% verboten, wie es beispielsweise in der α-^{16}O oder $\alpha - {}^{40}Ca$ -Streuung vorkommt (siehe HORIUCHI /84/) oder auch bei einer Abweichung vom Oszillatorgrenzfall, dann ist die Vernachlässigung ihres Einflusses nicht mehr statthaft. Schon ganz zu schweigen von Drei-Körper-Rechnungen, die bekanntermaßen sehr sensitv auf das Off-Shell-Verhalten der Zwei-Körper-Kräfte reagieren.

Etliche Jahre lang hat die Physiker die Frage beschäftigt, wie man partiell Pauli-verbotene Zustände in die Rechnung einbeziehen soll. Der entscheidende Durchbruch, zehn Jahre nach dem Erscheinen des Saito Modells, gelang SCHMID mit dem sogenannten verallgemeinerten Saito Modell, das erstmals auf der Koferenz in Dubna 1979 /85/ vorgestellt worden ist. Dieses Modell geht von folgendem Ansatz aus:

$$(H_0 + V_0 - E)|u\rangle = 0 \qquad \text{(V.1.11)}$$

mit

$$V_0 = V_{opt} - \sum_{i,j} |u_i\rangle\langle u_i|(H_0 + V_{opt} - E)|u_j\rangle M_{ij} \langle u_j| \qquad \text{(V.1.12)}$$

Dabei sind die Zustände $|u_j\rangle$ die Eigenzustände des entsprechenden Normkerns. Das Herz dieses Potentials ist die Matrix M, wegen ihrer Struktur auch Fischgrätenmatrix genannt. Sie ist von folgender Gestalt:

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1 & \eta_1 & \eta_1 & \cdot & \cdot \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_2 & \cdot & \cdot \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_3 & \cdot & \cdot \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \qquad \text{(V.1.13)}$$

Hier sind die Zahlen η_i die zu den Eigenzuständen $|u_i\rangle$ gehörenden Eigenwerte des Normkerns. Der Ansatz (V.1.12) ist das Resultat numerischer Studien und analytischer Approximationsmöglichkeiten von V_D. Die neue Form des Potentials ist so einfach, daß es als Grundlage für ein neues optisches Modell dienen kann. Dies erklärt auch den Subscript "opt" in Gleichung (V.1.11). Da im Ansatz (V.1.12) die Pauli-Struktur gebührend berücksichtigt wurde, ist die Willkür der Anpassung weitgehend eingeschränkt, und die Anpassung somit auch aussagekräftiger.

Man kann leicht zeigen, daß die Pauli-verbotenen Zustände Lösungen der Gleichung (V.1.11) bei jeder Energie sind. Darin besteht ein erster Unterschied zu den Orthogonality Condition- und Orthogonalizing Pseudopotential- Modellen. Der zweite Potentialterm in (V.1.12) hat die Aufgabe dei Wechselwirkung in der Relativbewegung, die durch die Eigenzustände des Normkerns mitbestimmt ist, nach Vorgabe der entsprechenden Eigenwerte η_i, d.h. nach Vorgabe der Pauli-Verbotenheit der Eigenzustände zu reduzieren. Die Fischgrätenstruktur der Matrix M führt zu folgender physikalischer Interpretation des Streuvorganges. Wenn die Relativbewegung zweier Cluster von einem zeitabhängigen Wellenpaket in dem Darstellungsraum $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ beschrieben wird, so wird man Übergänge von den höheren zu den niedrigeren Zuständen im Spektrum U verzeichnen. Am unteren Ende des Spekrums sind die Eigenzustände stark partiell oder gar gänzlich Pauli-verboten. Daher erwarten wir eine Reduktion der Übergangsamplituden gemäß dem Pauli-Prinzip. Ist ein Zustand 100% Pauli-verboten, dann sollte das Übergangsmatrixelement verschwinden. Bei X% Pauli-Verbotenheit sollte das Übergangsmatrix-Element entsprechend reduziert sein. Und genau dies leistet die Matrix M: Die Reduktion der Übergangsamplituden entsprechend dem Grad der Pauli-Verbotenheit, und zwar jeweils entsprechend dem Grad des

weniger erlaubten der beiden Zustände.

Dieses Verhalten bestätigt eine numerische Analyse des α-α-Streuproblems in der l=0 Partialwelle. Eine theoretische Begründung der Fischgrätenstruktur erhält man aus der Variation der Oszillatorbreiten beider Cluster. Man erkennt dann, daß die Asymmetrie zwischen den höheren und niedrigen Zuständen davon rührt, daß das Spektrum der angeregten Cluster ein unteres aber kein oberes Ende hat.

Die große Bedeutung des SCHMID'schen Modells besteht aber darin, daß es als neuartiges optisches Potential auch im Rahmen der Drei-Cluster-Rechnung mit Vorteil verwendet werden kann. Der immense Vorteil besteht außerdem darin, daß dieses Potential außer der Pauli-Struktur gleichfalls das Off-Shell-Verhalten der Resonating Group Methode reproduziert. Außerdem reproduziert es in natürlicher Weise das Orthogonality Condition- und das Orthogonalizing Pseudo-Potential-Modell. Im Fall von Orthogonality Condition Modell ist das unmittelbar einsichtigt. Um das Orthogonality Pseudopotential Modell zu veranschaulichen, greifen wir nochmals auf die Gleichung (V.1.12) zurück und schreiben sie in folgender Form:

$$V_D = V_{opt} - \sum_{i,j} |u_i\rangle\langle u_i| H_0 + V_{opt} - \varepsilon_i |u_j\rangle M_{ij} \langle u_j|. \qquad (V.1.14)$$

Man kann nun mit der Wahl der ε_i spielen. Ist beispielsweise $|u_1\rangle$ Pauli-verboten und wählt man $\varepsilon_1 = 100$ MeV und $\varepsilon_j = E$ für $j \neq 1$, dann wird der redundante Zustand $|u_1\rangle$ ein Positiv Energy Bound State bei Energie 100 MeV. Das Orthogonalizing Pseudopotential-Modell entspricht dem Grenzfall $\varepsilon_1 \longrightarrow \infty$. Bei mehreren Pauli-verbotenen Zuständen verläuft das Verfahren der Fixierung der ε_i- Werte analog. Man kann auch das Resonating Group Modell simulieren. Mit der Wahl $\varepsilon_1 = E$ bleibt $|u_1\rangle$ redundante Lösung der zugehörigen Schrödingergleichung bei beliebiger Energie, wie dies bei der Resonating Group Methode der Fall ist. Liegt noch ein weiterer Eigenwert nahe bei Eins aber ungleich Eins vor, so hat man im Resonating Group Modell eine noch zu besprechende Pauli- Resonanz bei einer Energie, die wir E_2 nennen wollen. Die Wahl $\varepsilon_1 = E_2$ reproduziert diese Resonanz bezüglich ihrer Lage. Sowohl die Lage E_2 als auch die Breite einer solchen Resonanz soll uns in den folgen-

den Paragraphen dieses Kapitels noch näher beschäftigen. Dies steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Frage, was mit den redundanten Zuständen des Oszillatorgrenzfalles passiert, wenn wir den Oszillatorgrenzfall verlassen. Zwei Möglichkeiten standen zur Debatte: Die redundanten Zustände geben Anlass zu Resonanzen, die entweder zu Bindungszuständen bei positiver Energie werden oder auch Resonanzen bleiben, wenn wir die Abweichung vom Oszillator-Grenzfall gegen Null gehen lassen. Rücken wir vom Oszillatorgrenzfall ein klein wenig ab, d.h. die Eigenwerte sind nicht mehr exakt Eins, dann - wie es im Paragraph V.2 gezeigt werden wird - ist der Resonanzpol ε_i bestimmt durch

$$\varepsilon_i = \langle \tilde{\phi} u_i | A H | \tilde{\phi} u_i \rangle , \qquad \text{(V.1.15)}$$

wobei $\tilde{\phi}$ ein Produkt bestimmter Clusterfunktionen ist. Der Ableitung und Interpretation dieser Formel gehen wir in den nächsten Paragraphen nach. Im §V.2 wird diese Frage im Rahmen der herkömmlichen Resonating Group Methode diskutiert. Im § V.3 wird dieselbe Frage anhand des SCHMID'schen Modells erörtert. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels schließlich geben wir ein numerisches Beispiel an für die Untersuchung der Pauli- Resonanzen im Fall der separablen Approximation der Resonating Group Potentiale.

V.2. Pauli-Resonanzen in der Resonating-Group-Methode in der Nähe des Oszillatorgrenzfalles

Wir betrachten die Resonating-Group-Gleichung eines Zwei-Cluster-Systems im Oszillatorgrenzfall

$$\int (d\vec{\xi}'') \langle \varphi_1 \varphi_2 \vec{\xi} | \mathbb{A}(H-E)\mathbb{A} | \varphi_1 \varphi_2 \vec{\xi}'' \rangle \langle \vec{\xi}'' | \chi \rangle = 0. \qquad \text{(V.2.1)}$$

Sie Auswertung und die Drehimpulszerlegung dieser Gleichung führt dann auf

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2} + V_l(\xi) - E_{rel} \right] f_l(\xi) + \int_0^\infty d\xi' k_l(\xi,\xi') f_l(\xi') = 0. \qquad \text{(V.2.2a)}$$

k_1 ist der gesamte Anteil der nichtlokalen Potentiale

$$k_1 = \bar{k}_1 - E_{rel} K_1 , \qquad \text{(V.2.2b)}$$

wobei $\bar{k}_1$ ein energieunabhängiges Potential und K_1 der Normkern ist. Wir nehmen jetzt anschaulichkeitshalber an, daß die Funktion der Relativbewegung $f_1(\xi)$ für ein bestimmtes l einen einzigen redundanten Zustand $u_1(\xi)$ besitzt, der eine quadratintegrable Lösung der Gleichung (V.2.2) bei allen Energien E_{rel} ist. Für diesen redundanten Zustand gilt:

$$\mathbb{A} | \varphi_1 \varphi_2 u_1 \rangle = 0. \qquad \text{(V.2.3)}$$

Dabei ist $u_1(\vec{\xi})$ der zu $u_1(\xi)$ mit dem entsprechenden Winkelanteil korrespondierende Zustand.

Die Resonating-Group-Gleichung möchten wir jetzt im Raum der Eigenzustände des Normkerns darstellen; diese Zustände bilden ein unendliches abzählbares Orthonormalsystem. Dabei setzen wir voraus, daß wir in diesem Orthonormalsystem das Spektrum der Gleichung (V.2.1) kennen. Im folgenden beschränken wir uns auf ein endliches Untersystem des besagten Orthonormalsystems und diskutieren im Anschluß an die Untersuchung den Übergang zu dem

vollen Orthonormalsystem. Dem Untersystem

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\} \tag{V.2.4a}$$

entspricht auf dem mikroskopischen Niveau die Orthogonalbasis

$$\mathcal{H} = \{\mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2 u_1\rangle, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2 u_2\rangle, \ldots, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2 u_n\rangle\}. \tag{V.2.4b}$$

Eine Abweichung vom Oszillatorgrenzfall kann durch einen hochangeregten Zustand g_2 des Clusters 2 simuliert werden, den wir dem Zustand φ_2 mit einem kleinen Anteil ε beimischen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann g_2 orthogonal zu φ_2 gewählt werden

$$\langle\varphi_2|\mathbb{A}_2|g_2\rangle = 0, \tag{V.2.5}$$

dabei ist $\mathbb{A}_2$ derjenige Teil des Antisymmetrisators $\mathbb{A}$, der nur die inneren Koordinaten des Clusters 2 austauscht. Die durch die Hinzunahme von g_2 bewirkte Abweichung vom Oszillatorgrenzfall kann man als Abbildung auffassen:

$$\varphi_2 \longrightarrow \varphi_2' = (1+\varepsilon^2)^{-1/2}(\varphi_2 + \varepsilon g_2). \tag{V.2.6}$$

Vorausgesetzt, daß φ_2 und g_2 bereits auf Eins normiert worden sind, ist φ_2' in der Gleichung (V.2.6) durch die Wahl des Koeffizienten $(1+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ ebenfalls normiert.
Mit der Beimischung g_2 lautet die neue Resonating-Group-Gleichung

$$\int (d\vec{\xi}'')\langle\varphi_1\varphi_2'\vec{\xi}|\mathbb{A}(H-E)\mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2'\vec{\xi}''\rangle\langle\vec{\xi}''|\chi\rangle = 0 . \tag{V.2.7}$$

Wir möchten nun das Spektrum der Gleichung (V.2.7), beziehungsweise der zu (V.2.7) korrespondierenden Gleichung (V.2.2) in dem ursprünglichen Darstellungsraum $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ des Oszillatorgrenzfalles untersuchen. Während wir aber beim alten Darstellungsraum für die Relativwellenfunktionen festhalten, verändert sich der mikroskopische Darstellungsraum $\mathcal{H}$, und wir erhalten einen Darstellungsraum $\mathcal{H}'$:

$$\mathcal{H}' = \{ \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_1' u_1\rangle, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_1' u_2\rangle, \ldots, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_1' u_n\rangle \} =$$

$$= \{ \varepsilon\mathbb{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_1' u_2\rangle, \ldots, \mathbb{A}|\varphi_1\varphi_1' u_n\rangle \}. \qquad (V.2.8)$$

Alle Zustände von (V.2.8) bis auf den ersten beschreiben die Relativwellenbewegung zweier Cluster, deren Energieerwartungswerte ansteigen mit größer werdendem i. Der erste Zustand hingegen beschreibt die Relativwellenbewgung des Clusters 1 und eines im Zustand g_2 hochangeregten Clusters 2. Diese Relativbewegung hat nur einen Knoten. Dennoch ist der Energieerwartungswert des ersten Zustandes wegen g_2 ziemlich hoch.
Die Gleichung (V.2.1) können wir im Raum U darstellen als eine algebraische homogene Gleichung der Dimension n.

$$\left(b_{ij} - E_{rel}\,\delta_{ij}(1-\eta_i)\right)_{ij} x_j = 0 \qquad i,j = 1,\ldots,n \qquad (V.2.9)$$

mit folgenden Definitionen

1) $E_{rel} = E - E_{12}$, $E_{12} = E_1 + E_2$

2) $E_1 = \langle\varphi_1|\mathbb{A}_1 H_1|\varphi_1\rangle$, $E_2 = \langle\varphi_2|\mathbb{A}_2 H_2|\varphi_2\rangle$

3) $b_{ij} = \langle\varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{rel})|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle$, $i,j = 1,\ldots,n$ (V.2.10)

4) $(1-\eta_i)\delta_{ij} = \langle u_i|1-K|u_j\rangle = \langle\varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle$, $i,j = 1,\ldots,n$

5) $x_j = \langle u_j|x\rangle \qquad j = 1,\ldots,n$.

H_1 und H_2 sind die inneren Hamiltonoperatoren der Cluster 1 und 2. Operator $\mathbb{A}_1$ ist das Pendant des Operators $\mathbb{A}_2$ für das Cluster 2, K ist der Normkernoperator, dessen Eigenwerte mit η_i bezeichnet worden sind. Die Säkulargleichung von (V.2.9) lautet:

$$\det\left(\left(b_{ij} - E_{rel}\,\delta_{ij}(1-\eta_i)\right)_{ij}\right) = 0. \qquad (V.2.11)$$

Die Lösung der Gleichung (V.2.7) in demselben Darstellungsraum U liefert eine weitere algebraische homogene Gleichung der Dimen-

sion n von der Gestalt (V.2.9). Allerdings müsssen die Definitionen (V.2.10) geeignet abgeändert werden. Anstelle der Elemente b_{ij} treten die Elemente $\tilde{b}_{ij}$:

$$\tilde{b}_{ij} = \langle \varphi_1 \varphi_2' u_i | \mathbb{A}(H-E_{12}')| \varphi_1 \varphi_2' u_j\rangle = (1+\varepsilon^2)^{-1}\Big[\langle \varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle + \tag{V.2.12}$$

$$+\varepsilon\big(\langle \varphi_1 g_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle + \langle \varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')\varphi_1 g_2 u_j\rangle\big) + \varepsilon^2\langle \varphi_1 g_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1 g_2 u_j\rangle\Big].$$

Dabei ist $E_{12}' = E_1 + E_2'$ mit der Eigenschaft , daß

$$E_2' = \langle \varphi_2' | \mathbb{A}_2 H_2 | \varphi_2'\rangle. \tag{V.2.13}$$

Damit verschiebt sich die Energieskala und E_{rel} geht über in E'_{rel}:

$$E'_{rel} = E - E'_{12} \tag{V.2.14}$$

Da u_1 ein Pauli-verbotener Zustand des Oszillatorgrenzfalles ist, erhalten wir für b_{11}, b_{1j} und b_{i1}:

$$\tilde{b}_{11} = \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{-1}\langle \varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$$

$$\tilde{b}_{1j} = \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{-1}\big(\langle \varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle + \varepsilon\langle \varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1 g_2 u_j\rangle\big)$$

$$\tilde{b}_{i1} = \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{-1}\big(\langle \varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1 g_2 u_1\rangle + \varepsilon\langle \varphi_1 g_2 u_i|\mathbb{A}(H-E_{12}')|\varphi_1 g_2 u_1\rangle\big).$$

(V.2.15)

Außerdem gilt:

$$\langle \varphi_1\varphi_2' u_i|\mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2' u_j\rangle = (1+\varepsilon^2)^{-1}\big[(1-\eta_i)\delta_{ij} + \varepsilon\langle \varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}|\varphi_1 g_2 u_j\rangle +$$

$$+\varepsilon\langle \varphi_1 g_2 u_i|\mathbb{A}|\varphi_1\varphi_2 u_j\rangle + \varepsilon^2\langle \varphi_1 g_2 u_i|\mathbb{A}|\varphi_1 g_2 u_j\rangle\big].$$

(V.2.16)

Die zugehörige Säkulargleichung lautet, nachdem wir den multiplikativen Faktor $(1+\varepsilon^2)^{-1/2}$, der in allen Matrixelementen erscheint,

herausgekürzt haben und manche Terme, die sich aus den Definitionen (V.2.12)-(V.2.16) ergeben, mit $O(\varepsilon)$ abgekürzt haben:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c} \varepsilon^2\langle\varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_1 g_2 u_1\rangle - & \varepsilon\langle\varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_1\varphi_2 u_2\rangle & \\ -\varepsilon^2\langle\varphi_2 g_2 u_1|\mathbb{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle E'_{rel} & +\varepsilon^2\langle\varphi_1 g_2 u_2|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_1 g_2 u_2\rangle & \\ \hline \varepsilon\langle\varphi_1\varphi_2 u_2|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_2 g_2 u_2\rangle + & \langle\varphi_1\varphi_2 u_2|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_1\varphi_2 u_2\rangle - & \\ +\varepsilon^2\langle\varphi_1 g_2 u_2|\mathbb{A}(H-E'_{n2})|\varphi_1 g_2 u_1\rangle & -(1-\gamma_2)E'_{rel} + O(\varepsilon) & \\ \hline & & \\ \end{array}\right\| = 0 \qquad \text{(V.2.17)}$$

Wir dividieren die erste Zeile und erste Spalte der Gleichung (V.2.17) durch ε und vernachlässigen dann alle Terme $O(\varepsilon)$, d.h. alle Terme die linear oder stärker von ε abhängen, und erhalten wegen $\langle\varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle = 1$:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c} \langle\varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}(H-E_{n2})|\varphi_2 g_2 u_1\rangle - E_{rel} & \langle\varphi_2 g_2 u_2|\mathbb{A}(H-E_{n2})|\varphi_1\varphi_2 u_2\rangle & \\ \hline \langle\varphi_1\varphi_2 u_2|\mathbb{A}(H-E_{n2})|\varphi_2 g_2 u_2\rangle & \langle\varphi_1\varphi_2 u_2|\mathbb{A}(H-E_{n2})|\varphi_1\varphi_2 u_2\rangle & \\ & -(1-\gamma_2)E_{rel} & \\ \hline & & \\ \end{array}\right\| = 0 \qquad \text{(V.2.18)}$$

Im Falle einer nicht zu hohen Zahl von Basiselementen $\{|u_i\rangle\}_i$ liegen die Zustände energetisch weit auseinander. Erst beim Übergang zum Kontinuum $\{|u\rangle\}_R$ koppeln ("resonieren") energetisch nahe gelegene Zustände. Wir dürfen daher in Gleichung (V.2.18) annehmen, daß die Kopplung der Zustände $\langle\varphi_1 g_2 u_1|\mathbb{A}$ und $\langle\varphi_1\varphi_2 u_i|\mathbb{A}$ sehr klein ist. Wir können dann die Determinante der Gleichung (V.2.18) ent-

weder nach der ersten Spalte oder der ersten Zeile entwickeln, und erhalten im Falle der schwachen Kopplung die erste Wurzel der Gleichung (V.2.18)

$$(E_{rel})_1 = \langle \varphi_1 g_2 u_2 | \mathbb{A}(H-E_n) | \varphi_1 g_2 u_2 \rangle + \Delta \qquad \text{(V.2.19)}$$

Die Energieverschiebung Δ ist der Ausdruck für die verbliebene Kopplung des ersten Zustandes an die anderen Zustände von $\mathcal{H}'$. Im Limes hoher Anregungsenergien $(E_{rel})_1$ geht Δ gegen Null.

Die Gleichung (V.2.18) zeigt, daß weder die Eigenwerte noch die Eigenvektoren der Gleichung (V.2.9) mit den Koeffizienten von (V.2.12)-(V.2.16) von ε abhängen. Der Faktor ε sagt nur aus, daß der erste Basisvektor eine Norm hat, die kleiner als Eins ist. Wenn wir von dem Gewicht ε, mit dem der Zustand $|\varphi_1 g_2 u_2\rangle$ in die Rechnung eingeht, absehen, dann spielt dieser Zustand die Rolle eines Distortionszustandes, falls die Anregungsenergie sehr hoch ist, oder die Rolle eines Compoundzustandes, falls wir mit einem Energieerwartungswert des angeregten Zustandes zu tun haben, der in dem von der Theorie zulässigen Energiebereich liegt. Dieser Compoundzustand ist mit einer Relativwellenbewegung assoziert, die nur einen Knoten hat. Würden wir jedoch den ersten Zustand der Basis $\mathcal{H}'$ weglassen und das Eigenwertproblem der Resonating-Group-Methode von H lösen wollen, dann würden die Eigenwerte und Eigenfunktionen von ε abhängig sein, da ja φ_1' von ε linear abhängt. Für kleine ε aber und wegen der Linearität in ε konvergieren die Lösungen des Eigenwertproblems zu den Lösungen des Eigenwertproblems (V.2.7) im Oszillatorgrenzfall. Die Einführung des ersten Zustandes in der Darstellungsbasis erhöht die Dimension des Problems um Eins und so erhalten wir einen zusätzlichen Eigenwert $(E_{rel})_1$, der in Gleichung (V.2.19) angegeben ist. Falls $(E_{rel})_1$ nicht im positiven Kontinuum liegt, stellt die dazugehörige Lösung einen Bindungszustand dar. Andernfalls haben wir es mit einem Zustand zu tun, der beim Übergang zun Kontinuum der Basiszustände Anlaß zu einer Resonanz gibt, deren Breite von der Kopplung des Zustandes $\langle \varphi_1 g_2 u_2 | \mathbb{A}$ an die Kontinuumszustände bestimmt ist.

Man kann sich jetzt fragen, was passieren wird, wenn wir die Zahl der Basiszustände in $\mathcal{H}'$ vergrößern. Damit vergrößert sich zunächst

die Dimension des Raumes und wir erhalten entsprechend mehr Eigenwerte. Die Energieeigenwerte kommen jetzt dichter zum Liegen. Aus der Eigenschaft des Compoundzustandes folgt, daß die Anwesenheit der zusätzlicher Zustände nur einen kleinen Einfluß auf die Energieverschiebung Δ haben werden. Lediglich diejenigen Basiszustände, die in naher Nachbarschaft zum Compoundzustand liegen,werden eine merkliche Beimischung des Compoundzustandes besitzen, und einen Beitrag zu der Energieverschiebung δ liefern, so daß der Eigenzustand zum Eigenwert $(E_{rel})_1$ tatsächlich dominant durch den ersten Basisvektor bestimmt ist.

Nun ist es leicht sich vorzustellen, was passiert, wenn wir die Basis durch das Kontinuum der Streuzustände ergänzen. Im Falle der Eigenwerte des Kontinuums erhalten wir als Lösungen Streuzustände, deren Streuamplituden parametrisiert werden können. Wenn wir ε hinreichend klein lassen und von dem ersten Basiszustand von $\mathcal{H}'$ absehen, dann erhalten wir aus Gleichung (V.2.7) dasselbe Resultat wie aus der Gleichung (V.2.1) im Oszillatorgrenzfall. Die Einbeziehung des Zustandes $A|\varphi_1 q_2 u_1\rangle$ in die Basis $\mathcal{H}'$ führt zu einer Resonanz an der Stelle $(E_{rel})_1$. Man kommt so auch zu dem Ergebnis, daß für kleine ε die Resonanzbreite von ε unabhängig sein wird. Der Grund liegt darin, daß die Normierung des ersten Basisvektors irrelevant ist. Man muß in diesem Zusammenhang zwei verschiedene ε-Abhängigkeiten auseinanderhalten. Einmal ε als Maß für die Länge des ersten Basisvektors in $\mathcal{H}'$, zum anderen ε als Maß für die Differenz zwischen den Zuständen γ_2 und φ_2', die bei hinreichend kleinem ε beliebig klein wird. Die erste ε-Abhängigkeit bleibt ohne Einfluß auf das Lösungsspektrum - solange ε ungleich Null ist - ,die zweite ist von vernachlässigbarer Ordnung. Von großem Interesse ist im Kontext der Resonating-Group-Theorie von WILDERMUTH und TANG die Frage, wie die Energieverschiebung der Resonanz Δ und die Resonanzbreite Γ einer solchen Resonanz zu definieren sind. Es liegt nahe zu versuchen, eine solche Abweichung vom Oszillatorgrenzfall durch die WILDERMUTH-BENÖHR'sche Resonanztheorie zu beschreiben. Wenn wir den Limesübergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ überall bis auf den ersten Basisvektor von $\mathcal{H}'$ ausführen, gelangen wir zu einem Resonanzpotential V_{res}, das durch die folgende Formel gegeben ist:

$$V_{res} = \frac{(H-E)\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_2\rangle\langle u_2 g_2 \varphi_1|\mathcal{A}(H-E)}{\langle \varphi_1 g_2 u_2|\mathcal{A}(H-E)|\varphi_1 g_2 u_2\rangle} \,. \qquad \text{(V.2.20)}$$

Die Ableitung dieser Formel können wir folgendermaßen andeuten. Den üblichen distortionsfreien Ansatz der Resonating-Group-Methode $\Psi = \mathcal{A}|\varphi_1 \varphi_2 \chi\rangle$ müssen wir jetzt durch

$$\Psi' = \mathcal{A}|\varphi_1 \varphi_2' \chi'\rangle \qquad \text{(V.2.21)}$$

ersetzen. Dieser Ansatz entspricht dem Übergang

$$\Psi' = \mathcal{A}|\varphi_1 \varphi_2' \chi'\rangle \longrightarrow \mathcal{A}|\varphi_2 g_2 u_2\rangle a_1 + \mathcal{A}|\varphi_1 \varphi_2 \chi\rangle = a_1 \mathcal{A}|\varphi_1 g u_1\rangle + \Psi, \qquad \text{(V.2.22)}$$

wobei

$$\langle u_2|\chi\rangle = 0 \qquad \text{(V.2.23)}$$

gefordert wird. Durch Elimination des Variationsparameters a_1 erhalten wir aus der Projektionsgleichung

$$\langle \delta\Psi|H-E|\Psi\rangle = 0 \qquad \text{(V.2.24)}$$

ein zusätzliches Potential. Es ist aus der WILDERMUTH-BENÖHR'schen Theorie bekannt, daß der so konstruierte Ansatz $\Psi' = \Psi + a\,\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$ auf den effektiven Hamiltonoperator führt, wobei V_c genau die Form von (V.2.20) hat. Mithin können wir die Energieverschiebung Δ und die Resonanzbreite Γ aus der zum Potential V_{res} korrespondierenden Resonanzamplitude A_{res} ablesen. Die Resonanzamplitude A_{res} schreibt sich dann (siehe die Definition und Herleitung des mit V_{res} assoziierten T-Operator in § A.3)

$$A_{res} = \frac{\langle \Psi^-(E)|(H-E)\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle\langle u_1 g_2 \varphi_1|\mathcal{A}(H-E)|\Psi^+(E)\rangle}{\langle \varphi_1 g_2 u_1|(H-E)\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle - \langle \varphi_1 g_2 u_1|\mathcal{A}(H-E)G^+(E)(H-E)|\varphi_1 g_2 u_1\rangle}, \qquad \text{(V.2.25)}$$

dabei sind $\Psi^-(E)$ und $\Psi^+(E)$ Lösungen der Gleichung (V.2.2) im

Oszillatorgrenzfall, worauf sich ebenfalls die Resolvente $G^+(E)$ bezieht. Die Resolvente $G^+(E)$ kann man aufspalten in einen Imaginär- und Realteil

$$G^+(E) = \int_p P \frac{1}{E^p - E} |\Psi^p\rangle\langle\Psi^p| + i\pi |\Psi^+(E)\rangle\langle\Psi^+(E)| \qquad (V.2.26)$$
$$= G^p(E) + i\pi \bar{G}(E).$$

Diese Formel ist in Ref./1/, Kapitel 9 erläutert. Den Definitionen von WILDERMUTH und BENÖHR folgend erhalten wir für die Energieverschiebung Δ und die Resonanzbreite Γ folgende Gleichungen:

$$\Delta(E) = \langle \varphi_1 g_2 u_1 | \mathcal{A}(H-E) G^p(E)(H-E) \mathcal{A} | u_2 g_2 \varphi_1 \rangle,$$
$$\Gamma(E) = 2\pi |\langle \varphi_1 g_2 u_1 | \mathcal{A}(H-E)\Psi^+(E)\rangle|^2. \qquad (V.2.27)$$

Das Auftreten des Zustands $\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$ steht im Einklang mit den vorstehend angestellten Überlegungen. Man erkennt auch, daß diese Größen von ε unabhängig sind, sofern ε hinreichend klein ist. Der Anteil von $|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$ in der Streufunktion wird von der dynamischen Gleichung (V.2.24) bestimmt; man ersieht der Gleichung (V.2.20) nämlich, daß ein Proportionalitätsfaktor a ($a \propto \mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$) sich quadratisch weghebt. Wird aber der Zustand $\mathcal{A}|\varphi_1 g_2 u_1\rangle$ in χ' nicht berücksichtigt, dann erhalten wir eine Lösung der Resonating-Group- Gleichung ohne das Resonanzpotential V_{res}.

Nachdem wir den Übergang (V.2.6) als Abweichung vom Oszillatorgrenzfall untersucht haben, wenden wir uns dem Fall von Cluster-Funktionen mit verschiedenen Oszillatorbreiten zu. Wir nehmen an, daß die Oszillatobreite des ersten Clusters durch ω_0 und die Oszillatorweite des zweiten Clusters durch $\omega_0 + \Delta\omega$ gegeben ist. Ist $\Delta\omega$ hinlänglich klein, dann können wir die interne Clusterfunktion des zweiten Clusters um den Punkt ω_0 nach der Variablen ω in eine Taylorreihe entwickeln und erhalten in erster Näherung

$$\varphi_2(\omega_0 + \Delta\omega) = \varphi_2(\omega_0) + \Delta\omega \left.\frac{d\varphi_2}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}. \qquad (V.2.28)$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß mit den Proportionalitätsbeziehungen

$$\Delta\omega \sim \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{d\varphi_2}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \sim g_2$$

diese Entwicklung identisch ist mit dem Ansatz (V.2.6). Damit können wir den Fall zweier ungleicher Oszillatorweiten in den inneren Clusterfunktionen auf den behandelten Fall zurückführen.

Damit ist die alte Frage, ob Pauli-Resonanzen im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ zu Positive Energy Bound States werden, entschieden. Sie werden nur dann zu Positive Energy Bound States, wenn für $\varepsilon \longrightarrow 0$ der Hamilton-Operator den Zustand $A|\varphi_1 g_2 u_2\rangle$ nicht an die Streuzustände koppelt. Zustände, die das leisten, gibt es zwar in den meisten Fällen, sie gehören aber nicht zu der Klasse von Zuständen, die man durch kleine Abweichung vom Fall gleicher Oszillatorbreiten erhält. Vielmehr erhält man durch solche Abweichungen Compoundresonanzen. Dadurch haben wir auch volle Übereinstimmung erreicht mit den Untersuchungen von WEIGUNY und Mitarbeitern /86/ und mit den Untersuchungen von SAITO und Mitarbeitern /87/. Diese Compoundresonanzen wurden über numerische Rechnungen von SCHMID und Mitarbeitern /88/ gefunden worden, als noch keine analytische Untersuchungen vorgelegen sind. Das Bild 1 zeigt das Ergebnis der Untersuchungen von SAITO /87/.

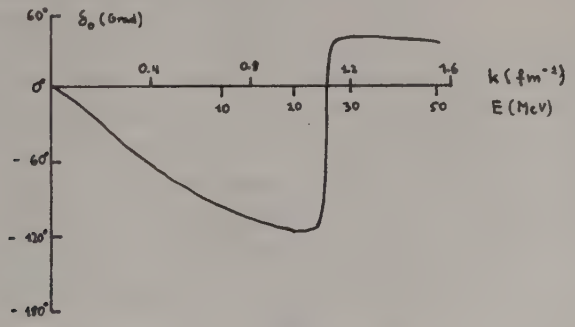


Bild 1.Streuphase für die l=0 Partialwelle. Details siehe Ref./87/.

Diesem Bild können wir durch Abschätzung die Lage E_o und die Breite Γ_o der Resonanz entnehmen. Man erhält für E_o = 25,14 MeV und für Γ_o = 0,944 MeV (siehe explizite Rechnung in Ref./87/). Die Abschä-

tzung der Energieverschiebung Δ_0 hat ergeben: $\Delta_0 = 0{,}34$ MeV.

Experimentell wird man diese Resonanzen wohl kaum feststellen können, denn sie liegen in einem Energiebereich, wo inelastische und Rearrangement -Kanäle berücksichtigt werden müssten. Diese Kanäle sind an die Resonanz gekoppelt und machen sie daher sehr breit.

V.3. Pauli-Resonanzen im Schmid-Modell

Der Ausgangspunkt für die Untersuchung der Pauli-Resonanzen in dem von SCHMID /85/ entwickelten, sogenannten erweiterten Saito-Modell ist die im §V.1 dieses Kapitels eingeführte und besprochene Gleichung

$$\left[T - V_{opt} - \sum_{i,j=1}^{R} |u_i\rangle\langle u_i|T + V_{opt} - E)|u_j\rangle M_{ij}\langle u_j| - E\right]|\chi\rangle = 0 \qquad (V.3.1)$$

Die Matrix (M_{ij}) ist in Gleichung (V.1.13) erklärt. Als Darstellungsraum dieser Gleichung wählen wir - wie schon im vorigen Paragraphen - die Menge der Eigenzustände des Normkerns U. Die Wellenfunktion $|\chi\rangle$ läßt sich dann schreiben

$$|\chi\rangle = \sum_{\nu} x_\nu |u_\nu\rangle \qquad (V.3.2)$$

mit der Eigenschaft, daß $x_\nu = \langle u_\nu|\chi\rangle$.
Die Gleichung (V.3.1) im Raum der Eigenzustände des Normkerns dargestellt, führt auf ein algebraisches Eigenwertproblem der Gestalt

$$\left[A - E(\mathbb{1} - K)\right]X = 0\,, \qquad (V.3.3)$$

wobei der Vektor X und die quadratischen Matrizen A und K folgendermaßen definiert sind

$$\begin{aligned} &\text{i)}\quad X = (x_1, x_2, \ldots)^t \quad (t = \text{transponiert}) \\ &\text{ii)}\quad (A_{ij}) = \left(\langle u_i|T + V_{opt}|u_j\rangle(1 - M_{ij})\right) \\ &\text{iii)}\quad K = \begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \eta_2 & \\ 0 & & \eta_3 \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (V.3.4)$$

Mit den Definitionen (V.3.4) können wir die Gleichung (V.3.3) elementweise schreibe, wobei nach der Einsteinschen Summenkonvention über gleiche Indizes summiert wird,

$$\left(\langle u_i|(T+V_{opt})|u_j\rangle + E\,\delta_{ij}\right)(1-N_{ij})\,x_j = 0 \qquad i=1,\dots,n\,. \tag{V.3.5}$$

Die Eigenwerte dieses Eigenwertproblems erhält man aus der Säkular-Gleichung

$$\det\left(\left(\langle u_i|(T+V_{opt})|u_j\rangle - E\,\delta_{ij}\right)(1-N_{ij})\right) = 0\,. \tag{V.3.6}$$

Die Abweichung vom Oszillatorgrenzfall beschreiben wir durch die Annahme, daß der erste Basiszustand u_1 von U nicht mehr gänzlich Pauli-verboten, sondern nur fast gänzlich Pauli-verboten ist. Als Konsequenz hieraus ist klar, daß der zugehörige Eigenwert des Normkerns nicht mehr gleich Eins ist. Wir setzen daher die Zahl $1-\eta_1 = \varepsilon$, wobei ε eine sehr kleine Zahl sein soll. Der Übergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ führt dazu, daß die Säkulardeterminante (V.3.6) einen Rang besitzt, der kleiner ist als ihre Dimension. Dieser Umstand ist mit der Existenz eines redundanten Zustandes verknüpft. Ist aber $\varepsilon \neq 0$, so tritt dieser Zustand in das Lösungsspektrum der Gleichung (V.3.1), nunmehr als nicht-redundanter Zustand ein. Wir möchten jetzt untersuchen, wie sich dieser Übergang vollzieht. Um die Formel überschaubar zu machen, führen wir noch folgende Abkürzung

$$\langle u_i|(T+V_{opt})|u_j\rangle =: a_{ij} \tag{V.3.7}$$

ein. Die Gleichung (V.3.6) lautet dann

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-E)\varepsilon & a_{12}\varepsilon & a_{13}\varepsilon & \cdots \\ a_{21}\varepsilon & (a_{22}-E)(1-\eta_2) & a_{23}(1-\eta_3) & \cdots \\ a_{31}\varepsilon & a_{32}(1-\eta_2) & (a_{33}-E)(1-\eta_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = \det S = 0. \tag{V.3.8}$$

Wir entwickeln die Determinante detS nach der ersten Zeile und

erhalten

$$\det S = (a_{11} - E)\,\varepsilon \det_1 - a_{12}\,\varepsilon \det_2(\varepsilon) + a_{13}\,\varepsilon \det_3(\varepsilon) - + \cdots = 0, \qquad \text{(V.3.9)}$$

wobei wir mit $\det_i$, $i=1,\ldots,n$ die zu den Elementen a_{1i} korrespondierenden Unterdeterminanten bezeichnet haben. Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß die Unterdeterminante $\det_1$ von ε unabhängig ist, während für alle anderen Unterdeterminanten gilt $\det_i(\varepsilon) = \varepsilon c_i, i=2,\ldots,n$, wobei c_i feste Zahlen sind, die durch die Matrixelübergangselemente a_{ij} und die Eigenwerte des Normkerns η_i, $i=2,\ldots,n$ und die Energie bestimmt sind. Daher erhalten wir aus Gleichung (V.3.9), wenn wir gleichzeitig noch durch ε kürzen und die noch von ε abhängigen Summanden in dem Ausdruck $O(\varepsilon)$ zusammenfassen,

$$(a_{11} - E)\det_1 + O(\varepsilon) = 0. \qquad \text{(V.3.10)}$$

Wenn wir jetzt die ε-führenden Terme vernachlässgen, dann erhalten wir den ersten Energieeigenwert

$$(E)_1 = a_{11} = \langle u_1 | (T + V_{opt}) | u_1 \rangle. \qquad \text{(V.3.11)}$$

Die Gleichung (V.3.11) entspricht der Gleichung (V.2.19) für ein geeigenetes optisches Potential V_{opt}, das die Resonating-Group-Lösungen mit dem Potential V_{res} wiedergibt.
Der Übergang zu dem Fall, wo mehrere Pauli-verbotene Zustände existieren, ist jetzt einfach zu vollziehen. Es genügt, diese Erweiterung von einem auf zwei beinahe Pauli-verbotene Zustände zu führen, um dann per inductionem, den allgemeinen Fall von mehreren beinahe Pauli-verbotenen Zuständen zu beweisen. Wir setzen $\varepsilon_1 = 1 - \eta_1$ und $\varepsilon_2 = 1 - \eta_2$ unabhängig voneinander, wobei ε_1 und ε_2 sehr kleine Zahle seien. Die Säkulargleichung (V.3.6) mit den in (V.3.7) angegebenen Definitionen nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-E)\varepsilon_1 & a_{12}\varepsilon_1 & a_{13}\varepsilon_1 & a_{14}\varepsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21}\varepsilon_1 & (a_{22}-E)\varepsilon_2 & a_{23}\varepsilon_2 & a_{24}\varepsilon_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31}\varepsilon_1 & a_{32}\varepsilon_2 & (a_{33}-E)(1-\eta_3) & a_{34}(1-\eta_3) & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41}\varepsilon_1 & a_{42}\varepsilon_2 & a_{43}(1-\eta_3) & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix} = \det S' = 0. \qquad (V.3.12)$$

Wir entwickeln die Determinante detS' wieder nach der ersten Zeile und erhalten:

$$\det S' = (a_{11}-E)\varepsilon_1 \det_1 - \varepsilon_1 a_{12} \det_2 + \varepsilon_1 a_{13} \det_3 - + \cdots = 0. \qquad (V.3.13)$$

Die Unterdeterminante $\det_1$ hängt nur von ε_1 ab, während die Unter-Determinanten $\det_i$ i=2,...,n von ε_1 und ε_2 abhängen. Analog zum Fall (V.3.8) können wir $\det_1$ schreiben als

$$\det_1 = \varepsilon_2 (a_{22}-E) + \varepsilon_2^2 b_1 , \qquad (V.3.14)$$

wobei b_1 eine feste Zahl ist. Für die Unterdeterminanten erhält man nach Auswertung der Gleichung (V.3.12)

$$\det_i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 d_i \qquad i \neq 1, \qquad (V.3.15)$$

wobei d_i wieder feste Zahlen sind, die durch die Elemente a_{ij} (i≠1), die Energie und die Eigenwerte des Normkerns η_j j=1,2 bestimmt sind. Setzen wir die in den Gleichungen (V.3.14) und (V.3.15) definierten Größen in Gleichung (V.3.13) ein, so erhalten wir

$$\det S' = (a_{11}-E)(a_{22}-E)\varepsilon_1 \varepsilon_2 b + (a_{11}-E)\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 b_1 - \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 a_{12} d_2 + \cdots = 0. \qquad (V.3.16)$$

Wir können jetzt die letzte Gleichung durch $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ dividieren

und dann die noch verbliebenen ε -Terme vernachlässigen und erhalten

$$b_1 (a_{11} - E)(a_{22} - E) = 0, \tag{V.3.17}$$

woraus wir die Eigenwerte ablesen:

$$\begin{aligned} (E)_1 &= a_{11} = \langle u_1 | (T + V_{opt}) | u_1 \rangle \\ (E)_2 &= a_{22} = \langle u_2 | (T + V_{opt}) | u_2 \rangle . \end{aligned} \tag{V.3.18}$$

Die Verallgemeinerung des Verfahrens auf m fast Pauli-verbitene Zustände ist jetzt offensichtlich und liefert die folgenden m Energieeigenwerte

$$(E)_i = a_{ii} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \, , \tag{V.3.19}$$

sofern nur $\varepsilon_i = 1 - \eta_i \longrightarrow 0$. Betrachten wir nochmals die Gleichung (V.3.5) im Grenzfall $\varepsilon_i \longrightarrow 0$, so erkennen wir, daß die Eigenzustände durch

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} , \ldots , X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{— i-te Stelle, ...} \tag{V.3.20}$$

gegeben sind. Mithin finden wir, daß im endlich-dimensionalen Darstellungsraum und im Grenzfall $\varepsilon_i \to 0$ die Pauli-verbotenen Zustände ($\eta_i = 1$) Bindungszustände sind. Vergleicht man die Formeln (V.2.19) und (V.3.11) oder (V.3.18) miteinander, so erkennt man, daß zwischen den Resonanzstellen kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Das SCHMID'sche Modell kann allerdings Resonating-Group-Theorie simulieren, indem man die Resonanzstellen E_i durch Einführung von ξ (siehe dazu Gleichung (V.1.4)) statt der Variablen E im nichtlokalen Teil des optischen Potentials verschiebt. Man wird $\xi_i = (E_{rel})_1$ wählen, wobei $(E_{rel})_1$ durch die Formel (V.2.19) gegeben ist. Wie schon erwähnt, haben wir gezeigt, daß in beiden

Fällen, in der Resonating-Group-Gleichung und im SCHMID'schen Modell, die Wahl $\varepsilon_1 = (E_{rel})_1$ zu einer Resonanz an derselben Energiestelle führt, sofern wir das Kontinuum der Basiszustände miteinbeziehen. Während aber im Fall der Resonating-Group-Theorie diese Resonanz auch beim Übergang $\varepsilon \longrightarrow 0$ eine Resonanz mit endlicher nicht verschwindender Resonanzbreite bleibt (siehe §V.2), wird im Fall des Simulationsmodells von SCHMID die Resonanz unendlich scharf, d.h. wir haben hier im Oszillatorgrenzfall ($\eta_i = 1$) einen Positive Energy Bound State vorliegen. Hier ist also die Simulation nicht ganz korrekt. Das ist auch nicht verwunderlich, denn Compoundzustände treten im Optischen Modell ja gar nicht explizit auf. Man legt aber auch keinen großen Wert darauf, Pauli-Resonanzen, die ohnehin "falsche" Resonanzen sind, exakt zu reproduzieren. Die Ursache dafür, daß wir im SCHMID'schen Modell im Limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ Bindungszustände positiver Energie erhalten, kann man von den Gleichungen (V.3.8) und (V.3.9) ablesen. Man erkennt, daß das Maß für die Kopplung des nahezu Pauli-verbotenen Zustandes an andere Zustände proportional zu der Zahl ε ist. Für $\varepsilon = 0$ entfällt also die Kopplung und die Resonanz wird unendlich scharf, oder mit anderen Worten, es liegt ein Positive Energy Bound State vor.

V.4. Pauli-Resonanzen bei separabler Approximation der Resonating-Group-Potentiale

Es wurde bereits erwähnt, daß, um die Drei-Cluster-Rechnungen numerisch durchzuführen, die Zwei-Cluster-Potentiale der Resonating-Group-Methode dargestellt werden müssen. In diesem Zusammenhang wurde von SCHMID eine Interpolationsmethode vorgeschlagen, die von KIRCHER /14/ untersucht wird. Wir wollen im folgenden davon ausgehen, daß eine solche separable Approximation der Zwei-Cluster-Potentiale der Resonating-Group-Methode bereits geleistet worden ist. In diesem Paragraphen nehmen wir eine fiktive separable Wechselwirkung für das n-α-Problem an, und untersuchen wie die redundanten Zustände in das Lösungsspektrum eintreten, wenn wir den Oszillatorgrenzfall verlassen.

Die Formfaktoren des Wechselwirkungsoperators sind die Eigenzustände des n-α-Normkerns zu einem bestimmten Drehimpuls l, den wir im folgenden unterdrücken. Die Basis der Eigenzustände U haben wir im §V.2 eingeführt. Die Wechselwirkung können wir dann ansetzen als

$$V = \sum_{i,k=1}^{R} |u_i\rangle \Lambda_{ik} \langle u_k| \,. \tag{V.4.1}$$

Die Lösung des Streuproblems ist die dem Potential V zugeordnete Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$|\Psi^+\rangle = |\varphi\rangle + G_o^+ V |\Psi^+\rangle \,, \tag{V.4.2}$$

wobei G_o^+ die freie Resolvente $G_o^+ = (E + i\varepsilon - H_o)^{-1}$ und H_o der kinetische Operator sind. Die Gleichung (V.4.2) stellen wir jetzt in dem Repräsentationsraum U (siehe Gleichung (V.2.4a)) dar, und erhalten

$$\langle u_j|\Psi^+\rangle = \langle u_j|\varphi\rangle + \sum_{i,k=1}^{R} \langle u_j| G_o^+(E) |u_i\rangle \Lambda_{ik} \langle u_k|\Psi^+\rangle, \qquad j = 1,\dots,R \,. \tag{V.4.3}$$

Gleichung (V.4.3) ist eine lineare, inhomogene Gleichung für die

unbekannten Größen, $\langle u_1|\Psi^+\rangle, \ldots, \langle u_R|\Psi^+\rangle$. In der Matrixschreibform lautet die letzte Gleichung:

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle u_1|\Psi^+\rangle \\ \vdots \\ \langle u_R|\Psi^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\varphi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_R|\varphi\rangle \end{pmatrix}, \qquad (V.4.4)$$

wobei die Matrixelemente der Matrix A gegeben sind durch

$$A_{jk} = \delta_{jk} - \sum_{i=1}^{R} \langle u_j|G_0^+|u_i\rangle \Lambda_{ik}. \qquad (V.4.5)$$

Ist die leichung (V.4.4) gelöst, so können wir die zugehörige Steulösung aus der Gleichung

$$|\Psi^+\rangle = |\varphi\rangle + \sum_{i,k}^{R} G_0^+(E)|u_i\rangle \Lambda_{ik} \langle u_k|\Psi^+\rangle \qquad (V.4.6)$$

erhalten, da ja die rechte Seite von (V.4.6) bekannt ist. Die asymptotische Gestalt von $\langle r|\Psi^+\rangle$ in jeder Partialwelle erhält man, wenn man die asymptotische Formel (IV.3.1) für $G_0^+(E)$ in der entsprechenden Partialwelle (siehe mathematischer Anhang C) benutzt. Aus der asymptotischen Gestalt der Streulösung können wir dann die Streuphase ablesen. Dieses Modell möchten wir jetzt spezifizieren.

Wir nehmen - gemäß dem Beipiel der n-α-Streuung - an, daß der Rang der Wechselwirkung in (V.4.1) für die Partialwelle l=0 drei ist, und daß in dieser Partialwelle nur ein Pauli-verbotener Zustand u_1 vorliegt. Wie SCHMID in Ref./89/ gezeigt hat, ist die Matrix der Potentialstärken Λ_{ik} von folgender Struktur:

$$(\Lambda_{ik}) = \begin{pmatrix} \Lambda'_{11} + E & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} \end{pmatrix}, \qquad (V.4.7)$$

wobei $\Lambda'_{11} = -\langle u_1|H_0|u_1\rangle$, $\Lambda_{12} = \langle u_2|H_0|u_1\rangle$ und die Elemente $\Lambda_{22}, \Lambda_{23}, \Lambda_{33}$ durch

ein Modell bestimmt sind. Das Verschwinden der Elemente $\Lambda_{13}=\Lambda_{31}=0$ garantiert die Redundanz des Zustandes u_1. Wenn wir jetzt den Oszillatorgrenzfall verlassen wollen, so bleibt im ursprünglichen Modell (Resonating-Group-Gleichung) nur eine Möglichkeit, nämlich dem α-Teilchen zum Oszillatorgrundzustand noch einen angeregten Zustand beizumischen. Das führt dann zu einem Eigenwert des Norm-Kerns $\eta_i \neq 1$. Im zweiten Modell, namentlich dem optischen Fischgrätenmodell (siehe Paragraph V.3), verhindert die Forderung $\eta_i \neq 1$ die Redundanz. Im dritten Modell, das wir in diesem Paragraph besprechen, und das auf separabler Näherung der Potentiale beruht, bedingt die Abweichung vom Oszillatorgrenzfall eine Verletzung der Redundanzbedingung. Insbesondere erscheinen an Stelle der Nullen für die Matrixelemente Λ_{13} und Λ_{31} der Gleichung (V.4.7), und wenn der Rang größer als drei ist, dann auch für die Elemente $\Lambda_{14},\dots,\Lambda_{1R}$ kleine Größen, die wir mit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_R$ bezeichnen wollen. Mit diesen Größen wollen wir die Abweichung vom Oszillatorgrenzfall im Falle des separablen Potentialmodells simulieren. Der Übergang zu den Größen $\varepsilon,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_R$ läßt sich dann so darstellen:

$$\begin{pmatrix} \Lambda'_{11}+E & \Lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & \Lambda_{25} \\ 0 & \Lambda_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \Lambda_{24} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \Lambda_{25} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda'_{11}+E & \Lambda_{12} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & \Lambda_{25} \\ \varepsilon_1 & \Lambda_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_2 & \Lambda_{24} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_3 & \Lambda_{25} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich an der separablen Darstellung (V.4.1) mit vorgegebenen Formfaktoren $|u_1\rangle,\dots,|u_R\rangle$ festhalten. Als nicht-triviales Beispiel untersuchen wir den Fall $\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$ und schneiden die Matrix in (V.4.7) bei Rang drei ab, dann erhalten wir

$$(\Lambda_{ik}) = \begin{pmatrix} \Lambda'_{11}+E & \Lambda_{12} & \varepsilon \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \varepsilon & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix}. \qquad \text{(V.4.8)}$$

Wir können die Matrix (V.4.8) als eine spezielle Abweichung vom

Oszillatorgrenzfall in Verbindung mit einer gewählten Wechselwirkung (V.4.7) interpretieren. Wir möchten jetzt untersuchen, wie sich die Größe ε auf die Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung auswirkt. Zunächst wird sich die Matrix (A_{jk}) ändern, die mit der Abkürzung $\langle u_j | G_0^+ | u_i \rangle = G_{ji}$ $i,j=1,2,3$ folgende Gestalt annimmt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - G_{11}(\Lambda'_{11}+E) - G_{12}\Lambda_{21} - G_{13}\varepsilon & , & -G_{11}\Lambda_{12} - G_{12}\Lambda_{22} - G_{13}\Lambda_{32} & , & -G_{11}\varepsilon - G_{12}\Lambda_{23} - G_{13}\Lambda_{33} \\ -G_{21}(\Lambda'_{11}+E) - G_{22}\Lambda_{21} - G_{23}\varepsilon & , & 1 - G_{21}\Lambda_{12} - G_{22}\Lambda_{22} - G_{23}\Lambda_{32} & , & -G_{21}\varepsilon - G_{22}\Lambda_{23} - G_{23}\Lambda_{33} \\ -G_{31}(\Lambda'_{11}+E) - G_{32}\Lambda_{21} - G_{33}\varepsilon & , & -G_{31}\Lambda_{12} - G_{32}\Lambda_{22} - G_{33}\Lambda_{32} & , & 1 - G_{31}\varepsilon - G_{32}\Lambda_{23} - G_{33}\Lambda_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(V.4.9)}$$

Die Größe ε erscheint in zwei Spalten der Matrix A in (V.4.9). Die Lösung des Problems erhält amn mit Hilfe der Cramer'schen Regel, wobei wir noch folgende Abkürzungen einführen:

$$\langle u_i | \Psi^+(E) \rangle = \Psi_i(E) =: \Psi_i$$
$$\langle u_i | \varphi(E) \rangle = \varphi_i(E) =: \varphi_i \qquad \text{(V.4.10)}$$

und erhalten als Lösung

$$\Psi_i = \frac{\det N_i}{\det A} \qquad i = 1,2,3 . \qquad \text{(V.4.11)}$$

Die Matrix N_i geht dadurch aus der Matrix A hervor, daß man die i-te Spalte der Matrix A durch die Spalte $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^t$ ersetzt. Untersuchen wir zunächst die Lösungen im Limes $N_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} N_i(0)$ und $A(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} A(0)$. Man kann leicht feststellen, daß $\det(A(0))=0$ ist, wie intuitiv erwartet, weil die erste Spalte der Matrix A(o) ein Null-Vektor ist. Das kann man folgendermaßen sehen. Die Potentialstärken $\Lambda'_{11}+E$ und Λ_{12} sind nach Ref./89/ so konstruiert, daß im Grenzfall $\varepsilon \longrightarrow 0$ der redundante Zustand $|u_1\rangle$ Lösung der Schrödinger-Gleichung zu jeder Energie ist, d.h.

$$(H_0 + V)|u_1\rangle = E\,|u_1\rangle . \qquad \text{(V.4.12)}$$

Da $|u_1\rangle$ Bindungsfunktion ist, erfüllt sie die homogene Lippman-Schwinger-Gleichung

$$|u_1\rangle = G_0^+(E)V|u_1\rangle . \qquad \text{(V.4.13)}$$

Projizieren wir jetzt von links mit $|u_1\rangle$ so erhalten wir

$$\langle u_1|u_1\rangle = 1 = \langle u_1|\,G_0^+(E)V|u_1\rangle . \qquad \text{(V.4.14)}$$

Das Einschieben der Identität, die sich in dem hier gewählten Darstellungsraum als

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{3} |u_i\rangle\langle u_i| .$$

schreiben läßt, liefert schließlich

$$1 = \langle u_1|\,G_0^+ \sum |u_i\rangle\langle u_i|V|u_1\rangle = G_{21}(\Lambda'_{11} + E) + G_{22}\Lambda_{12} . \qquad \text{(V.4.15)}$$

Projizieren wir statt $\langle u_1|$ mit $\langle u_2|$ so erhalten wir aus (V.4.13)

$$0 = \langle u_2|u_1\rangle = G_{21}(\Lambda'_{11} + E) + G_{22}\Lambda_{21}, \qquad \text{(V.4.16)}$$

und schließlich liefert die Projektion mit $\langle u_3|$

$$0 = \langle u_3|u_1\rangle = G_{31}(\Lambda'_{11} + E) + G_{32}\Lambda_{21} . \qquad \text{(V.4.17)}$$

Berücksichtigen wir, daß die erste Spalte der Matrix A(o), also im Grenzfall $\varepsilon \longrightarrow 0$, lautet

$$\Big(1 - (G_{11}(\Lambda'_{11} + E) + G_{12}\Lambda_{12}),\ -(G_{21}(\Lambda'_{11} + E) + G_{12}\Lambda_{21}),\ -(G_{31}(\Lambda'_{11} + E) - G_{32}\Lambda_{21})\Big)^t$$

(V.4.18)

so ersieht man den Gleichungen (V.4.15),(V.4.16) und (V.4.17), daß sie identisch mit dem dreidimensionalen Nullvektor ist. det (A(o))=O sagt in Übereinstimmung mit der Redundanzforderung an den Zustand $|u_1\rangle$ aus, daß die Gleichung (V.4.6) keine eindeutige Lösung hat. Sobald aber $\varepsilon \neq 0$ wird, wird die Lösung der Gleichung (V.4.6) eindeutig und wir können die Streuphase auf die Abhängigkeit von ε hin untersuchen.

Die auf diese Weise durchgeführten numerischen Untersuchungen unterscheiden sich von früheren Untersuchungen mit der Resonating-Group-Gleichung durch ihre sehr viel höhere Genauigkeit (acht-stellige Genauigkeit gegenüber vier-stelliger Genauigkeit; Einzelheiten siehe mathematischen Anhang C).
Die Streuphase gewinnt man aus der Formel

$$\delta_0 = \arctan \frac{\mathrm{Im}\, S}{\mathrm{Re}\, S} \qquad \text{(V.4.19)}$$

mit

$$S = \sum_{i,j=1}^{3} \varphi_i \Lambda_{ij} \psi_j \,. \qquad \text{(V.4.20)}$$

Die Formel (V.4.19) und (V.4.20) werden im mathematischen Anhang C abgeleitet.
Als numerisches Beispiel haben wir das n- α -Streuproblem untersucht. Das numerische Verfahren ist ebefalls im mathematischen Anhang C beschrieben.

Ein typisches Resultat der durchgeführten Rechnung stellt sich so dar: Wählen wir die "freien" Potentialstärken Λ_{11} =-1.0, Λ_{22} =-0.3 und Λ_{33}=-0.5, dann erhalten wir bei $(E)_1$ = 5.2 MeV eine Resonanz, die bei verschwindendem ε zu einem Positive Energy Bound State wird. Das Bild 2 zeigt die Streuphasenkurven in Abhängigkeit von dem Parameter ε . Die Rechnung zeigt deutlich, daß der Resonanzpol von ε unabhängig ist. Die Resonanzbreite hängt in diesem Simulationsmodell von ε ab, weil ε das Maß für die Kopplung des Zustandes $|u_1\rangle$ an den Zustand $|u_3\rangle$ ist.

Eine weitere interessante Größe in diesem Zusammnhang ist die Größe $|\langle u_1|\Psi^+(E)\rangle| = |\Psi_1(E)|$, die wir als Anregungsfunktion bezeichnen wollen.

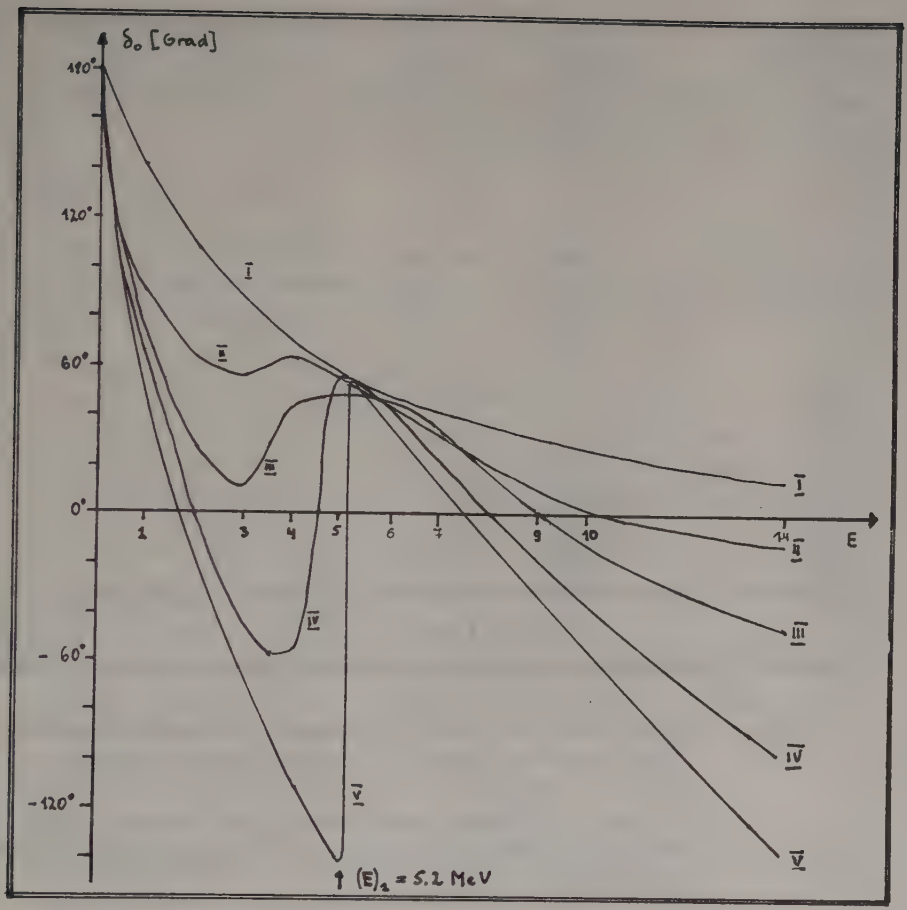


Bild 2. Streuphase der l=0 Partialwelle für verschiedene ε Werte: I entspricht ε=0, II ε=0.002, III ε=0.003, IV ε=0.005 und V entspricht ε=0.02. Für ε > 0.02 ist die Resonanz nunerisch nicht mehr auflösbar.

Sie beschreibt den Anteil des Zustandes $\langle u_1|$ in dem Streuzustand $\Psi^+(E)$ bei Energie E. Das Bild 3 zeigt, wie der Anteil $|\Psi_{+}(E)|$ mit steigendem ε in der Resonanz in der Streufunktion zunimmt, während gleichzeitig dieser Anteil bei allen anderen Energien abnimmt.

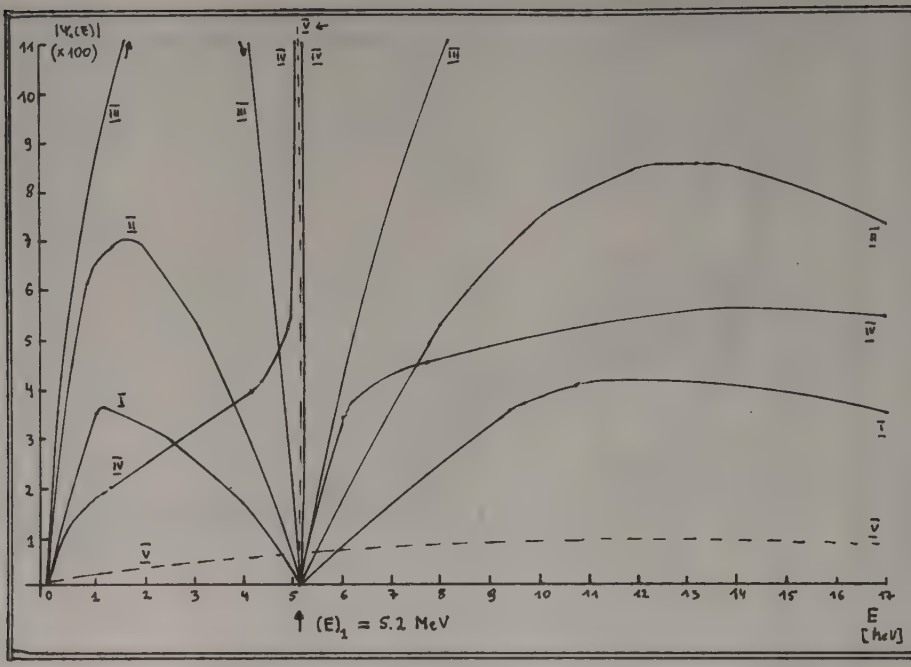


Bild 3 zeigt Anregungsfunktion $|\Psi_4(E)|$ für verschiedene ε Werte: I entspricht ε=0,0005, II ε=0,001, III ε=0,003, IV ε=0,0015 und V entspricht ε=0.1. Die Kurve V wurde der Kenntlichkeit wegen gestrichelt eingezeichnet. Das Maximum der Kurve V liegt an der Stelle E=5,2 MeV und beträgt ungefähr 18850.

Zusammendfassend können wir feststellen: Sowohl beim Fischgrätenmodell als auch beim Interpolationsmodell vollzieht sich der Übergang vom Oszillatorgrenzfall zum realistischen Fall etwas anders als beim Resonating Group Modell. Während im Resonating Group Modell die Pauli-Resonanzen nur in Sonderfällen zu Positive Energy Bound States werden, ist dies im Simulationsmodell stets der Fall. Das behandelte numerische Beispiel zeigt zwar den Übergang zum Positive Bound State aber nicht bei ε=0, sondern bei kleinen $\varepsilon \neq 0$. Das liegt vermutlich daran, daß das Beispiel zu speziell gewählt worden ist, so daß hier pathologische Merkmale zum Vorschein kommen. Dieser Sachverhalt muß noch eingehend untersucht werden.

Mathematischer Anhang A: Ableitung der asymptotischen Gestalt der Kanalresolventen im Drei-Teilchen-System

A.1

Die asymptotische Auswertung der Resolventen bedient sich der Methode der "stationären Phase", die wir nachstehend beschreiben. Wir betrachten hierzu Integrale der Art

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i t h(s)} g(s)\, ds \qquad (A.1.1)$$

für reelle t und $t \to \infty$. Wir nehmen an, daß h(s) und g(s) seien mindestens zweimal nach s differenzierbar, und unterscheiden zwei Fälle:

a) h(s) besitzt in $\alpha \leq s \leq \beta$ keinen Stationaritätspunkt s_0, $h'(s_0) \neq 0$,

b) h(s) besitzt in $\alpha \leq s \leq \beta$ einen Stationaritätspunkt s_0, $h'(s_0) = 0$, $h''(s_0) \neq 0$.

Der Fall a) ist für uns uninteressant. Er wird in Ref./93/ behandelt. Im Fall b) darf aus Plausibilitätsbetrachtungen Ref./94/ angenommen werden, daß der Beitrag des Integranden um den Stationaritätspunkt asymptotisch dominiert. Wenn h(s) lokal Null - oder äquivalent dazu konstant - ist, dann erhalten wir für (A.1.1)

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i h(s) t} g(s)\, ds \xrightarrow[t \to \infty]{} e^{i h(s_0) t} \int_{-\infty}^{\infty} g(s_0) \exp\left[\frac{i h''(s_0)(s-s_0)^2 t}{2} \right] ds . \qquad (A.1.2)$$

Führen wir die Integration aus dann erhalten wir die endgültige Formel, die sogenannte Kelvin'sche Formel:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i h(s) t} g(s)\, d \xrightarrow[t \to \infty]{} g(s_0) \left(\frac{2\pi}{t\,|h''(s_0)|} \right)^{1/2} \exp\left(i \left[h(s_0) t + \frac{\pi}{4} \frac{h''(s_0)}{|h''(s_0)|} \right] \right) . \qquad (A.1.3)$$

Die asymptotische Berechnung mehrdimensionaler Integrale wird ebenfalls in Referenz /94/ behandelt.

A.2

Die Formeln (IV.3.4) und (IV.3.6) wurden von NEWTON /72/ abgeleitet. Mit derselben Technik beweisen wir jetzt (IV.3.8).

Die freie Resolvente im Drei-Teilchen-Raum kann man folgendermaßen schreiben

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}_\alpha\, e^{i(\vec{\eta}_\alpha-\vec{\eta}'_\alpha)\vec{p}_\alpha}\, \bar{g}_0^+(E-p_\alpha^2;\vec{\xi}_\alpha,\vec{\xi}'_\alpha)\,, \qquad (A.2.1)$$

dabei bedeutet $\bar{g}_0$ die freie Resolvente im α-Subsystem (α beliebig). Die Winkelintegration liefert

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') = -\frac{i}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{s_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dp_\alpha\, p_\alpha\, e^{ip_\alpha s_\alpha}\, \bar{g}_0^+(E-p_\alpha^2,\vec{\xi}_\alpha,\vec{\xi}'_\alpha)\,, \qquad (A.2.2)$$

wobei $s_\alpha = |\vec{\eta}_\alpha - \vec{\eta}'_\alpha|$. Für $|\vec{\xi}_\alpha| \longrightarrow \infty$ und $|\vec{\xi}'_\alpha|$ klein, setzen wir die asymptotische Gestalt vo $\bar{g}_0^+$ (Formel (IV.3.1)) ein, und erhalten

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') \longrightarrow \frac{i}{16\pi^3}\,\frac{1}{s_\alpha}\,\frac{1}{\gamma_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dp_\alpha\, p_\alpha\, e^{i[q_\alpha\gamma_\alpha + p_\alpha s_\alpha - q_\alpha \vec{\xi}_\alpha^{\,0}\vec{\xi}'_\alpha]}\,, \qquad (A.2.3)$$

wobei $q_\alpha = \sqrt{E - p_\alpha^2}$. Um den Grenzwert $s_\alpha \longrightarrow \infty$ und $\frac{\xi_\alpha}{\gamma_\alpha} = const \neq 0$ zu berechnen, verwenden wir die Formel (A.1.3) und erhalten

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{\xi}_\alpha|\to\infty \\ |s_\alpha|\to\infty \\ |\vec{\xi}'_\alpha| \text{ klein}}] \frac{e^{i\pi/4}\,E^{3/4}}{2(2\pi)^{5/2}}\,\frac{e^{iKS}}{S^{5/2}}\, e^{-iK\vec{\xi}_\alpha/\gamma_\alpha\vec{\xi}'_\alpha}\,, \qquad (A.2.4)$$

wobei $S^2 = s_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2$. Da $S^2 = \vec{\eta}_\alpha^2 - 2\vec{\eta}_\alpha\vec{\eta}'_\alpha + \vec{\eta}'^2_\alpha + \vec{\xi}_\alpha^2 = R^2 - 2\vec{\eta}_\alpha\vec{\eta}'_\alpha + \vec{\eta}'^2_\alpha$ gilt für $R^2 = \vec{\eta}_\alpha^2 + \vec{\xi}_\alpha^2 \gg \vec{\eta}'^2_\alpha$

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{\xi}_\alpha|,|s_\alpha|\to\infty \\ |\vec{\xi}'_\alpha|,|\vec{\eta}'_\alpha| \\ \text{- klein}}] \frac{e^{i\pi/4}\,E^{3/4}}{2(2\pi)^{5/2}}\,\frac{e^{iKR}}{R^{5/2}}\, e^{-i\vec{\eta}_\alpha\vec{\eta}'_\alpha KR^{-2} - i\vec{\xi}_\alpha\vec{\xi}'_\alpha KR^{-2}}\,. \qquad (A.2.5)$$

Für freie Teilchen haben wir $\vec{\eta}_\alpha = 2\vec{p}_\alpha t$, $\vec{\zeta}_\alpha = 2\vec{q}_\alpha t$ und deshalb $\vec{R} = 2\vec{K}t$ (t ist hier der Zeitparameter). Deshalb dürfen wir folgende Definitionen vornehmen

$$K\vec{\eta}_\alpha / R \equiv \vec{p}'_\alpha \quad , \quad K\vec{\zeta}_\alpha / R \equiv \vec{q}'_\alpha \, , \tag{A.2.6}$$

unter der Voraussetzung, daß sie die geeigneten asymptotischen Impulse sind, wenn wir die Teilchen am Ort $\vec{\eta}_\alpha$ und $\vec{\zeta}_\alpha$ beobachten. Wir erhalten damit

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} \frac{e^{i\pi/4} E^{3/4} e^{iKR}}{2(2\pi)^{5/2} R^{5/2}} e^{-iKR^{-2}[\vec{\eta}_\alpha \vec{\eta}'_\alpha + \vec{\zeta}_\alpha \vec{\zeta}'_\alpha]} \tag{A.2.7}$$

und da gilt $(\vec{\eta}'_\alpha \vec{\eta}_\alpha + \vec{\zeta}'_\alpha \vec{\zeta}_\alpha) = \vec{R}\vec{R}'$, haben wir die Formel (IV.3.8) bewiesen:

$$g_0^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} \frac{e^{i\pi/4} E^{3/4} e^{iKR}}{2(2\pi)^{5/2} R^{5/2}} e^{-iK\vec{R}\circ\vec{R}'} \, . \tag{A.2.8}$$

A.3

Im letzten Pragraph des mathematischen Anhangs A möchten wir die Ableitung der Operatoren t_4 und T_4^C in der im Kapitel IV verwendeten Gestalt (siehe Formel (IV.2.20) und (IV.2.29)) erläutern.

Beginnen wir zunächst mit dem Operator t_4, der im Gegensatz zu den Operatoren t_1, t_2 und t_3 ein echter Drei-Teilchen-Operator ist. Während die Resolventen g_1, g_2 und g_3 die Subsystemstreung, eingebettet im Drei-Teilchen-Raum, beschreiben, beschreibt die Resolvente g_4 echte Drei-Teilchen-Streuung. Zunächst ist der Zusammenhang zwischen t_4 und V_4 durch folgende Beziehung gegeben:

$$g_4 V_4 = g_0 t_4 . \qquad \text{(A.3.1)}$$

Dabei ist im Gegensatz zu entsprechenden Beziehungen für t_1, t_2 und t_3 g_0 die freie Drei-Teilchen-Resolvente. Die explizite Formel für t_4 gewinnt man aus der Resolventenidentität

$$g_4 = g_0 + g_0 V_4 g_4 . \qquad \text{(A.3.2)}$$

Die Identität (A.3.2) beschreibt die Drei-Teilchen-Dynamik, wenn die drei Teilchen nur an einem Drei-Teilchen-Potential V_4 streuen können. Die Ableitung vom Operator t_4 verläuft nun paralell zu den einschlägigen Zwei-Teilchen-Operator-Beziehungen (man beachte, daß für kompakte Potentiale im sechs-dimensionalen Koordinatenraum, wir mit denselben Vorteilen ausgestattet sind wie im Fall eines kompakten Potentials in der Zwei-Teilchen-Streuung). Für den Operator t_4 erhalten wir mithin:

$$t_4 \equiv V_4 + V_4 g_4 V_4 \qquad \text{(A.3.3a)}$$

$$t_4 = V_4 + t_4 g_0 V_4 \qquad \text{(A.3.3b)}$$

$$t_4 = V_4 + V_4 g_0 t_4 . \qquad \text{(A.3.3c)}$$

Die letzte Gleichung dient uns als Ausgangspunkt für die Herleitung der Formel(IV.2.20) unter der Annahme, daß sich V_4 separabel darstel-

len läßt: $V_4 = |F\rangle\lambda\langle F|$. Dann erhält man aus (A.3.3c)

$$t_4 = |F\rangle\lambda\langle F| + |F\rangle\lambda\langle F|g_0 t_4 . \tag{A.3.4}$$

Der Ansatz

$$t_4 = |F\rangle\,\gamma\,\langle F| \tag{A.3.5}$$

führt dann (siehe Ref. /50/, Kapitel V) auf die Formel

$$t_4 = |F\rangle \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \langle F|g_0|F\rangle} \langle F| . \tag{A.3.6}$$

Damit ist die Formel (IV.2.20) bewiesen.

Für den Operator T_4 gilt hingegen folgende Beziehung

$$GV_4 = GT_4 \tag{A.3.7}$$

Die explizite Formel für T_4 erhält man aus der Resolventenidentität, die wir in §IV.1 besprochen haben,

$$G = G + GV_4 G . \tag{A.3.8}$$

Wie im Fall des Operators t_4 erhalten wir für T_4 mutatis mutandis

$$T_4 = V_4 + V_4 G V_4 \tag{A.3.9a}$$

$$T_4 = V_4 + T_4 G V_4 \tag{A.3.9b}$$

$$T_4 = V_4 + V_4 G T_4 . \tag{A.3.9c}$$

Die Herleitung der expliziten Formel für T_4, unter derselben Annahme der Separabilität für V_4 wie vorstehend, verläuft vollkommen analog zu der Ableitung der Formel (A.3.6) und man erhält schließlich:

$$T_4 = |F\rangle \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \langle F|G|F\rangle} \langle F| \,. \qquad \text{(A.3.10)}$$

Die Formel (A.3.10) ist aber identisch mit dem in der Formel (IV.2.29) angegebenen Ausdruck für T_4^c (der Index c verweist auf die Drei-Körper-Resonanz, die durch V_4^c und T_4^c beschrieben wird). Somit unterscheiden sich die beiden Operatoren nur in den im Nenner auftretenden verschiedenen Resolventen g_o und G. T_4 und t_4 fallen zusammen, falls alle Zwei-Teilchen-Potentiale abgeschaltet werden. Damit ist klar, daß obschon beide T-Operatoren sich auf dasselbe Potential V_4 beziehen, ihre Resonanzpole und Resonanzbreiten sich mitunter gewaltig unterscheiden können. Darüberhinaus wäre die Drei-Teilchen-Resonanz in dem t_4-"Bild" nur in der frei-frei-Streuung wirksam. Die Resolventengleichungen (A.3.2) und (A.3.8) zeigen nochmals, daß der Operator T_4 physikalische Bedeutung hat und daß t_4 nur formellen Charakter (als in die Rechnung eingehende Größe) trägt. Die Resolventengleichung (A.3.2) kann im Gegensatz zu (A.3.8) die Situation nicht beschreiben, wo der einlaufende Zustand ein Zwei-Körper-Kanal ist. Siehe hierzu auch die Diskussion in §IV.2.

Mathematischer Anhang B: Ableitung der asymptotischen Gestalt der Drei-Teilchen-Resolvente

Zunächst beweisen wir die zentralen Formeln (IV.3.25) und (IV.3.27) des §IV.3. Formel (IV.3.27) kann man auf verschiedene Weise beweisen. Am schnellsten kommt man zum Ziel, wenn man von (IV.3.15) ausgeht und die asymptotische Form (IV.3.8) benutzt; dann erhält man

$$G^{+}(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[\substack{|\vec{R}|\to\infty \\ |\vec{R}'| \text{ klein}}]{} \frac{e^{i\vec{R}_1}\, E^{3/4}\, e^{i\kappa R}}{2(2\pi)^{5/2}\, R^{5/2}} \left[\phi_o^*(\vec{R}') + \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\phi_o^* V_\alpha g_\alpha^{+} + \phi_o^* V_\alpha g_\alpha^{+} \bar{V}_\alpha G\right)|\vec{R}'\rangle\right]. \qquad (B.1)$$

Dabei ist $\phi_o(\vec{R}) = e^{i\kappa\vec{R}^\circ\vec{R}'} = \phi_o(\kappa\vec{R}^\circ, \vec{R}')$.

Untersuchen wir jetzt den Term $g_\alpha^{-} V_\alpha \phi_o$. Die Resolvente

$$g_\alpha^{(-)} = g_o + g_\alpha^{(-)} V_\alpha g_o \qquad (B.2)$$

führt auf folgende Beziehung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\alpha(E-i\varepsilon)\phi_o = \phi_o + g_\alpha(E-i0)V_\alpha\phi_o =: \Psi_\alpha^{(-)}, \qquad (B.3)$$

wobei $\Psi_\alpha^{(-)}(\vec{R}) = e^{i\vec{\kappa}\vec{R}}\phi_\alpha^{(-)}(\vec{\zeta})$. Die Formel (B.3) beschreibt Streuung im Subsystem α, eingebettet im Drei-Teilchen-Raum. Der einlaufende Impuls des Subsystems ist durch $\vec{\zeta}\,\frac{\kappa}{R}$ aus der Formel (IV.3.8) eindeutig bestimmt. Aus der letzten Gleichung folgt

$$g_\alpha^{(-)} V_\alpha \phi_o = \Psi_\alpha^{(-)} - \phi_o . \qquad (B.4)$$

Damit erhalten wir für den Summenausdruck in der Formel (B.1)

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\phi_o^* V_\alpha g_\alpha^{(+)} + \phi_o^* V_\alpha g_\alpha^{(+)} \bar{V}_\alpha G\right) = \qquad (B.5)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\Psi_\alpha^{(-)*} + \Psi_\alpha^{(-)*}\bar{V}_\alpha G\right] - \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\phi_o^* + \phi_o^*\bar{V}_\alpha G\right].$$

Den zweiten Term in Gleichung (B.5) kann man weiter aufspalten in

$$\sum_{\alpha=1}^{3}[\phi_0^* + \phi_0^* \bar{V}_\alpha G] = \sum_{\alpha=1}^{3}[\phi_0^* + \phi_0^* V G] - \sum_{\alpha=1}^{3}\phi_0^* V_\alpha G \,. \tag{B.6}$$

Dabei ist $V = \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha$. Da aber

$$\phi_0^* + \sum_{\alpha=1}^{3}\phi_0^* V_\alpha G = (\phi_0^* + \phi_0^* V G)$$

erhält man für (B.1)

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty]{|\vec{R}'| \text{ klein}}$$
$$\frac{e^{i\pi/4}}{2(2\pi)^{5/2}}\frac{E^{3/4}}{R^{5/2}}e^{iKR}\Big[\sum_{\alpha=1}^{3}[\Psi_\alpha^{(-)*} + \Psi_\alpha^{(-)*}\bar{V}_\alpha G] - 2[\phi_0^* + \phi_0^* V G]\Big]. \tag{B.7}$$

Benutzen wir die Resolventengleichung

$$G^{(-)} = g_\alpha^{(-)} + g_\alpha^{(-)} \bar{V}_\alpha G^{(-)} \tag{B.8}$$

und berücksichtigen die Beziehung (B.3), so erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E-i\varepsilon)\Psi_\alpha^{(-)} = \Psi_\alpha^{(-)} + \Psi_\alpha^{(-)} \bar{V}_\alpha G^{(-)} =: \chi_\alpha^{(-)} \,. \tag{B.9}$$

Der Zustand $\chi_\alpha^{(-)}$ ist ein Drei-Teilchen-Streuzustand, der sich aus einem Streuzustand im Subsystem α und einer ebenen Welle des Zuschauerteilchens entwickelt hat. Wir können daher - wegen (IV.3.8) - diesen Zustand mit $\chi_\alpha^{(-)}(K\vec{R}^*,\vec{R}) = \langle \chi_\alpha^{(-)} | \vec{R}' \rangle$ charakterisieren. Die Resolventenbeziehung

$$G^{(-)} = g_0 + g_0 V G^{(-)} \tag{B.10}$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E-i\varepsilon)\phi_0 = \phi_0 + \phi_0 V G^{(-)} =: \chi_0^{(-)} \tag{B.11}$$

liefern den entsprechenden Drei-Teilchen-Streuzustand, der sich aus der ebenen Drei-Teilchen-Welle $\phi_0(K\vec{R}^*,\vec{R}')$ entwickelt hat. Damit er-

halten wir für (B.1), wenn wir den Ausdruck in der Klammer mit dem Summanden ($\chi_o^{(-)*} - \chi_o^{(-)*}$) erweitern:

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty \;\; |\vec{R}'| \text{ klein}}$$

$$\frac{e^{i\pi/4}\, E^{3/4}}{2(2\pi)^{5/2}} \frac{e^{iKR}}{R^{5/2}} \left[\chi_o^{(-)*}(K\hat{R},\vec{R}') + \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\chi_\alpha^{(-)*}(K\hat{R},\vec{R}') - \chi_o^{(-)*}(K\hat{R},\vec{R}')\right)\right] . \tag{B.12}$$

Damit ist die Formel (IV.3.27) bewiesen. Diese Formel kann auch bewiesen werden, wenn man von (IV.3.18) ausgeht, und die asymptotischen Formeln (IV.3.6) α =1,2,3 benutzt.

Als nächstes möchten wir die Formel (IV.3.25) beweisen, die die asymptotische Gestalt der Drei-Teilchen-Resolvente in den Rearrangement-Kanälen beschreibt. Ausgehend von der Resolventenbeziehung (IV.3.11) und α fest, erhalten wir unter Benutzung der asymptotischen Formel (IV.3.4)

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{\eta}_\alpha|\to\infty \;\; |\vec{\xi}_\alpha| \text{ und } |\vec{R}'| \text{ klein}}$$

$$-\frac{1}{4\pi(2\mu_\alpha)^{3/2}} \sum_n \frac{e^{iq_{\alpha n}\eta_\alpha}}{\eta_\alpha} \varphi_{\alpha n}(\vec{\xi}_\alpha)\left[\Psi_{\alpha n}^* + \Psi_{\alpha n}^* \bar{V}_\alpha G\right] . \tag{B.13}$$

Berücksichtigen wir, daß mit der Resolventengleichung (B.8) die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\, G(E-i\varepsilon)\Psi_{\alpha n} = \Psi_{\alpha n} + \Psi_{\alpha n}\bar{V}_\alpha G^{(-)} =: \chi_{\alpha n}^{(-)} \tag{B.14}$$

folgt, dann können wir für (B.13) schreiben

$$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{\eta}_\alpha|\to\infty \;\; |\vec{\xi}_\alpha| \text{ und } |\vec{R}'| \text{ klein}}$$

$$-\frac{1}{4\pi(2\mu_\alpha)^{3/2}} \sum \frac{e^{iq_{\alpha n}\eta_\alpha}}{\eta_\alpha} \varphi_{\alpha n}(\vec{\xi}_\alpha)\chi_{\alpha n}^{(-)*} , \tag{B.15}$$

womit der Beweis der Formel (IV.3.25) erbracht ist. Anzumerken ist, daß der Zustand $\chi_{\alpha n}^{(-)}$, dessen Spezifikationen in der Formel (IV.3.26) angegeben sind, sich aus einem Subsystembindungszustand entwickelt hat.

Auch intuitiv ist es klar, warum die Subsystenstreuzustände nicht

zu den Rearrangement-Kanälen beitragen. Zunächst müssen wir uns trivialerweise vergegenwärtigen, daß wir Messungen asymptotisch vornehmen. Im Fall von Zwei-Körper-Kanälen haben wir bezüglich der Koordinate $\vec{\xi}_\alpha$ ein scharfes Bündel von Teilchen. Im Fall der Subsystemstreuzustände hat die Zahl der Teilchen asymptotisch das Maß Null, wenn der Detektor eine endliche Fläche abdeckt, und hinreichend weit vom Reaktionszentrum entfernt ist. Bei gebundenen Subsystemen spielt dies keine Rolle, denn das Bündel in Richtung $\vec{\xi}_\alpha$ ist bei beliebiger Entfernung gleichermaßen scharf gebündelt.

Im Zusammenhang mit der unterschlagenen Ableitung der Formel (B.12) aus der Formel (IV.3.18) ist folgende Feststellung vom Interesse. Ein und dieselbe Drei-Teilchen-Streulösung, wo im einlaufenden Zustand alle Teilchen frei waren, kann sich aus zwei verschiedenen Anfangszuständen entwickelt haben:

1) aus einem Eigenzustand zu h_0, ϕ_0, also aus einer ebenen Welle des Drei-Teilchen-Systems und
2) aus einem Eigenzustand zu h_α, Ψ_α^+, also eines Tensorproduktes der ebenen Welle des Zuschauerteilchens und der Subsystemstreulösung im Subsystem .

Als nächstes beweisen wir die Formel (IV.3.30). Hierzu gehen wir von der folgenden Beziehung aus (Ref./50/) :

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z) T g_0(z), \qquad \text{(B.16)}$$

wobei T die T-Matrix ist, für die gilt

$$T = V + V G V. \qquad \text{(B.17)}$$

Ausgehend von (B.16) und unter Benutzung von (IV.3.8) gelangen wir zu

$$G^+(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty \; |\vec{R}'| \text{ klein}}$$

$$\frac{e^{i\pi/4} E^{3/4} e^{iKR}}{2(2\pi)^{5/2} R^{5/2}} \left[e^{-iK\vec{R}''\cdot\vec{R}'} + \int d\vec{R}'' d\vec{R}''' e^{-iK\vec{R}''\cdot\vec{R}'} \langle \vec{R}'' | T | \vec{R}''' \rangle \langle \vec{R}''' | g_0 | \vec{R}' \rangle \right], \qquad \text{(B.18)}$$

und erhalten nach einigen Umrechnungen

$G(E;\vec{R},\vec{R}') \xrightarrow[|\vec{R}|\to\infty,\ |\vec{R}'| \text{ klein}]{}$

(B.19)

$$\frac{e^{i\pi/4}E^{3/4}e^{iKR}}{2(2\pi)^{5/2}R^{5/2}}\left[e^{-iK\vec{R}^{\circ}\vec{R}'} + (2\pi)^{6/2}\int R_{oo}^{(-)}(\vec{K},\vec{K})\langle\vec{K}|g_o|\vec{R}'\rangle\, d\vec{K}'\right].$$

Das ist aber genau die Formel (IV.3.3o). Hierbei haben wir folgende Definitionen benutzt:

$$\langle K\vec{R}^{\circ}|T|\vec{K}'\rangle = R_{oo}^{(-)}(\vec{K},\vec{K}') = \langle\phi_o\vec{R}|V+VG(q^2+\rho^2+io)V|\phi_o\vec{R}'\rangle. \qquad (B.20)$$

$R_{oo}^{(-)}$ ist die frei-frei-Übergangsamplitude. Die Formel (B.19) zeigt nochmal, daß bei Auswertung des Terms $G(E)V_4^C$ (V_4^C das Resonanzpotential) die ganze Struktur des Drei-Teilchen-Problems ohne das Resonanzpotential automatisch ins Spiel kommt. Das kommt noch deutlicher zum Vorschein, wenn man versucht $R_{oo}^{(-)}(\vec{K},\vec{K}') = \langle\vec{K}|\, U_{oo}^{(-)}|\vec{K}\rangle$ durch die Übergangsoperatoren $U_{\alpha o}^{(-)}$ auszudrücken. Wir benutzen folgende Definitionen:

$$U_{oo}^{(-)} = V + VGV \quad \text{und} \quad U_{\alpha o}^{(-)} = V + \bar{V}_\alpha GV. \qquad (B.21)$$

Berücksichtigt man, daß $g_oVGVg_o = \sum_\alpha^3 (g_\alpha V_\alpha g_o V_\alpha g_o + g_\alpha V_\alpha g_o \bar{V}_\alpha G)$ ist so erhält man für $U_{oo}^{(-)}$ ($V_\alpha g_\alpha = t_\alpha g_o$)

$$U_{oo}^{(-)} = V + \sum_{\alpha=1}^{3} t_\alpha g_o U_{\alpha o}^{(-)}, \qquad (B.22)$$

woraus folgt

$$R_{oo}^{(-)} = \langle\phi_o\vec{R}|V + \sum_{\alpha=1}^{3} t_\alpha g_o U_{\alpha o}^{(-)}|\phi_o\vec{R}'\rangle. \qquad (B.23)$$

Mit folgenden Umformungen

$$\langle\phi_o\vec{R}|V_\alpha g_\alpha = \langle\phi_\alpha^{+}\vec{R}| - \langle\phi_o\vec{R}| \qquad (B.24)$$

erhalten wir aus (B.23) die endgültige Formel (IV.3.34).

Zum Schluß dieses Anhangs beweisen wir die Äquivalenz der Formeln (IV.3.27) und (IV.3.30) d.h.

$$\left[\chi_o^{(-)*}(K\vec{R}^\circ,\vec{R}') + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\chi_\alpha^{(-)*}(K\vec{R}^\circ,\vec{R}) - \chi_o^{(-)*}(K\vec{R}^\circ,\vec{R}')\right)\right] =$$

$$= \left[e^{-iK\vec{R}^\circ\vec{R}'} + (6\pi)^{6A}\int R_{oo}^{(-)}(K\vec{R}^\circ,\vec{R}')\langle\vec{R}'|g_o|\vec{R}'\rangle d\vec{R}'\right]. \tag{B.25}$$

Die linke Seite der letzten Gleichung haben wir aus Gleichung (B.1) gewonnen. Wir können (B.1) Fourier-transformieren und erhalten (wir verwenden dabei die Formel (IV.3.18)) :

$$\int d\vec{R}'\left[\langle\phi_o(K\vec{R}^\circ)|\vec{R}'\rangle + \sum_{\alpha=1}^{3}\langle\Psi_\alpha^{(-)}|V_\alpha g_o + V_\alpha g_o\bar{V}_\alpha G|\vec{R}'\rangle\right]\langle\vec{R}'|\vec{R}'\rangle =: A \tag{B.26}$$

mit $|\Psi_\alpha^{(-)}\rangle = |\vec{q}_\alpha\phi_\alpha^{(-)}\rangle$. Wegen der Resolventengleichung $g_\alpha^{(-)} = g_o^{(-)} + g_o^{(-)}V_\alpha g_\alpha^{(-)}$ können wir für $|\Psi_\alpha^{(-)}\rangle$ schreiben

$$|\Psi_\alpha^{(-)}\rangle = |\vec{q}_\alpha\phi_\alpha^{(-)}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\,\bar{g}(E-i\varepsilon)|K\vec{R}^\circ\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\left(g_o(E-i\varepsilon) + g_\alpha(E-i\varepsilon)V_\alpha g_o(E-i\varepsilon)\right)|K\vec{R}^\circ\rangle. \tag{B.27}$$

Mit Gleichung (B.27) können wir (B.26) schreiben

$$\int\Big(\langle K\vec{R}^\circ|\vec{R}'\rangle + \sum_{\alpha=1}^{3}\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}\langle K\vec{R}^\circ|\left(g_o(E-i\varepsilon) + g_o(E-i\varepsilon)V_o g_\alpha(E-i\varepsilon)\right)\times}$$

$$\underline{\times\left(V_\alpha g_o(E-i\varepsilon) + V_\alpha g_o(E-i\varepsilon)\bar{V}_\alpha G(E-i\varepsilon)|\vec{R}'\rangle\right)}\langle\vec{R}'|\vec{R}'\rangle d\vec{R}'. \tag{B.28}$$

Wir untersuchen jetzt den unterstrichenen Ausdruck.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\langle K\vec{R}^\circ|\left(g_o(E-i\varepsilon) + g_o(E-i\varepsilon)V_\alpha g_\alpha(E-i\varepsilon)\right)\left(V_\alpha g_o(E-i\varepsilon) + V_\alpha g_o(E-i\varepsilon)\bar{V}_\alpha G(E-i\varepsilon)|\vec{R}'\rangle\right) =$$

$$= \langle K\vec{R}^\circ|V_\alpha g_o|\vec{R}'\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\langle K\vec{R}^\circ|g_\alpha(E-i\varepsilon)V_\alpha g_o(E-i\varepsilon)V_\alpha g_o(E-i\varepsilon) + g_\alpha(E-i\varepsilon)V_\alpha g_o(E-i\varepsilon)\bar{V}_\alpha G(E-i\varepsilon)|\vec{R}'\rangle \tag{B.29}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß $g_o + g_\alpha V_\alpha g_o = g_\alpha$ und daß $g_o V_\alpha g_\alpha = g_\alpha V_\alpha g_o$. Berücksichtigt man ferner das Summenzeichen in (B.28) und die Identität

$$g_o V G V g_o = \sum_{i=1}^{3}\left(g_i V_i g_o V_i g_o + g_i V_i g_o \bar{V}_i G\right), \tag{B.30}$$

was leicht nachgewiesen ist, wenn man die verschiedenen Resolventengleichungen benutzt, so folgt für

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\langle \vec{kR}^{\circ}|V_\alpha g_\circ|\vec{k}'\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \langle \vec{kR}^{\circ}|g_\alpha V_\alpha g_\circ V_\alpha g_\circ + g_\alpha V_\alpha g_\circ \bar{V}_\alpha G|\vec{k}'\rangle\right] =$$

$$= \langle \vec{kR}^{\circ}|V_\alpha g_\circ|\vec{k}'\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \langle \vec{kR}^{\circ}|g_\circ V G V g_\circ|\vec{k}'\rangle . \qquad (B.31)$$

Den Limes kann man für den bra-Vektor $\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \langle \vec{kR}^{\circ}|g_\circ(E-i\varepsilon) = \langle \vec{KR}^{\circ}|$, weil dieser, im Gegensatz zu $|\vec{k}'\rangle$, On-Shell definiert ist, ausführen, und erhalten

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \langle \vec{kR}^{\circ}|g_\circ V G V g_\circ|\vec{k}'\rangle = \langle \vec{kR}^{\circ}|V G V g_\circ|\vec{k}'\rangle . \qquad (B.32)$$

Somit erhalten wir für Gleichung (B.26), wenn wir die Fourier-Transformation umkehren:

$$A = \left[\langle \vec{kR}^{\circ}|\vec{R}'\rangle + \langle \vec{kR}^{\circ}|(V+VGV)\, g_\circ|\vec{R}'\rangle\right]. \qquad (B.33)$$

Das können wir schreiben als

$$A = \langle \vec{kR}^{\circ}|\vec{R}'\rangle + \int \langle \vec{kR}^{\circ}|V+VGV|\vec{u}'\rangle\langle \vec{u}'|g_\circ|\vec{R}'\rangle\, d\vec{u}' . \qquad (B.34)$$

Die Definitionen in (IV.3.31) führen schließlich auf

$$A = \langle \vec{kR}^{\circ}|\vec{R}'\rangle + \int R^{(+)}_{\circ\circ}(\vec{kR}^{\circ},\vec{k}')\langle \vec{u}'|g_\circ|\vec{R}'\rangle\, d\vec{u}' . \qquad (B.35)$$

Damit ist die Äquivalenz der Formel (IV.3.27) und (IV.3.30) bewiesen. Als Fußnote geben wir hier detailliert die Ableitung der asymptotischen Formel der vollen Zwei-Teilchen-Resolvente $\bar{g}_\alpha(E;\vec{r},\vec{r}')$ ein, für $|\vec{r}'|$ endlich und $|\vec{r}| \longrightarrow \infty$, um die ε-Limites der Formeln (B.11) und (B.14) zu verdeutlichen.

Betrachten wir die Resolventengleichung

$$\bar{g}^{+}_{\alpha} = \bar{g}^{+}_{\circ} + \bar{g}^{+}_{\circ} V_\alpha \bar{g}_\alpha , \qquad (B.36)$$

und nutzen aus, daß $(\bar{g}_\alpha^{\pm})^\dagger = \bar{g}_\alpha^{\mp}$ ($\dagger$ ist die Operation der Adjunktion), dann erhalten wir

$$\bar{g}_\alpha^{\pm}(E;\vec{r},\vec{r}') \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{4}{4\pi}\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}\left[e^{-ik\vec{r}_0\cdot\vec{r}'} + \int d\vec{r}''\, e^{-ik\vec{r}_0\cdot\vec{r}''} V_\alpha(\vec{r}'')\bar{g}_\alpha^{\pm}(\vec{r}''\vec{r}')\right], \tag{B.37}$$

wobei wir einfachheitshalber ein lokales Potential $V_\alpha(\vec{r})$ genommen haben. Der konjugiert komplexe Ausdruck in der Klammer liest sich dann, wobei wir annehmen, daß V_α ein hermitescher Operator ist,

$$\overline{[\ldots]} = e^{ik\vec{r}_0\cdot\vec{r}'} + \int \bar{g}_\alpha(\vec{r}'\vec{r}'')V_\alpha(\vec{r}'')e^{ik\vec{r}_0\cdot\vec{r}''}\,d\vec{r}''. \tag{B.38}$$

Mit $\langle\vec{r}'|\phi_0 k\vec{r}_0\rangle = e^{ik\vec{r}_0\cdot\vec{r}'}$ sieht man sofort, daß (B.38) das Ergebnis der nachstehenden Formel ist:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\,\bar{g}_\alpha(E-i\varepsilon)|\phi_0 k\vec{r}_0\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\left(\bar{g}_0(E-i\varepsilon) + \bar{g}_\alpha(E-i\varepsilon)V_\alpha\,\bar{g}_0(E-i\varepsilon)\right)|\phi_0 k\vec{r}_0\rangle =$$

$$= |\phi_0 k\vec{r}_0\rangle + \bar{g}_\alpha^{(-)} V_\alpha |\phi_0 k\vec{r}_0\rangle = |\phi_{k\vec{r}_0}^{(-)}\rangle.$$

Dabei haben wir stillschweigend folgende Definitionen benutzt

$$\bar{g}_\alpha^{\pm} = \bar{g}_\alpha(E\pm i0) \qquad \text{und} \qquad \bar{g}_0^{\pm} = \bar{g}_0(E\pm i0). \tag{B.40}$$

Die Formeln (B.37) und (B.39) ergeben dann die Formel (IV.3.3). In diesem Sinne sind alle Limites, die wir im Anhang A und Anhang B ausgeführt haben, zu verstehen.

Mathematischer Anhang C: Numerik des n-α-Streuproblems für l=0 und separables Potential vom Rang drei

In diesem Anhang wird das numerische Verfahren, das in Pragraph V.4 für die Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung benötigt wurde, bereitgestellt. Es handelt sich hierbei um die Lippmann-Schwinger-Gleichung des n-α-Streuproblems in der l=0 Partialwelle im Falle eines separablen Potentials vom Rang drei (siehe §V.4).
Die Lippmann-Schwinger-Gleichung für ein allgemeines nichtlokales Potential lautet in der l-ten Partialwelle:

$$\psi_\ell^+ = A_\ell j_\ell(kr) - \frac{2\mu k i}{\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^\infty j_\ell(kr_<) h_\ell^{(1)}(kr_>) V_\ell(r',r'') \psi_\ell^+(r'') r'^2 r''^2 dr' dr'' . \quad (C.1)$$

Dabei sind $j_l(kr)$ die Besselfunktionen, $h_l^{(1)}(kr)$ die Hankelfunktionen erster Ordnung und μ die reduzierte Masse $\mu = \frac{1}{2} m_N$ (m_N= Nukleonenmasse). Für $r_>$ und $r_<$ gilt: $r_> = \max(r,r')$ und $r_< = \min(r,r')$. Das Produkt $ikj_l(kr_<)h_l(kr_>)$ stellt die l-te Komponente der freien Resolvente $g_0(\vec{r},\vec{r}')$ dar:

$$ikj_\ell(kr_<) h_\ell^{(1)}(kr_>) = g_\ell(r,r') , \quad (C.2)$$

wobei

$$g_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) g_\ell(r,r') P_\ell(x) . \quad (C.3)$$

Hier ist x der Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$. Nach Gleichung (C.3) gewinnt man $g_l(r,r')$ aus $g_0(\vec{r},\vec{r}')$ aus folgender Formel

$$g_\ell(r,r') = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} P_\ell(x)\, dx . \quad (C.4)$$

$P_l(x)$ bezeichnen die Legendre-Polynome l-ter Ordnung. Für den uns interessierenden Fall l=0 erhalten wir

$$\psi_o^+ = j_o(kr) - \frac{2\mu ik}{\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^\infty j_o(kr_<) h_o^{(1)}(kr_>) V_o(r', r'') \psi^+(r'') r'^2 r''^2 dr' dr'' \qquad (C.5)$$

mit

$$j_o(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$$

$$h_o^{(1)}(kr) = \frac{\sin kr - i\cos kr}{kr} = \frac{\exp[i(kr - \frac{\pi}{2})]}{kr} . \qquad (C.6)$$

Wir untersuchen jetzt Gleichung (C.5) im Falle eines separablen Potentials $V_o = \sum_{j,k=1}^{3} |\lambda_j\rangle \Lambda_{jk} \langle\lambda_k|$ mit den Potentialstärken

$$(\Lambda_{ik}) = \begin{pmatrix} \Lambda'_{11} + E & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} , \qquad (C.7)$$

wobei $\Lambda'_{11} = -\langle\lambda_1|H_0|\lambda_1\rangle$, $\Lambda_{12} = \langle\lambda_1|H_0|\lambda_2\rangle$ und Λ_{22}, Λ_{23} und Λ_{33} freie Parameter das Simulationsmodells sind. Die Elemente Λ'_{11} und Λ_{12} wurden numerisch und analytisch berechnet mit dem Ergebnis:

$$\Lambda'_{11} = -\hbar^2/2\mu\, 3\alpha = -2.701244813$$

$$\Lambda_{12} = -\hbar^2/2\mu\, 3\alpha\sqrt{3} = -2.505557154. \qquad (C.8)$$

Die Formfaktoren des Potentials V_o sind gegeben durch :

$$\lambda_1(r) = c_{00} \cdot r\, L_0^{(1/2)}(2\alpha r^2) e^{-\alpha r^2} = c_{00} \cdot r \cdot e^{-\alpha r^2}$$

$$\lambda_2(r) = c_{10} \cdot r\, L_1^{(1/2)}(2\alpha r^2) e^{-\alpha r^2} = c_{10} \cdot r \left(\tfrac{3}{2} - 2\alpha r^2\right) e^{-\alpha r^2} \qquad (C.9)$$

$$\lambda_3(r) = c_{20} \cdot r\, L_2^{(1/2)}(2\alpha r^2) e^{-\alpha r^2} = c_{20} \cdot r \left(\tfrac{15}{4} - 10\alpha r^2 + 4\alpha^2 r^4\right) e^{-\alpha r^2} .$$

λ_1, λ_2 und λ_3 sind die Eigenfunktionen des Normkerns in der l=0 Par-

tialwelle. Die Funktionen $L_n^{(\nu)}(x)$ sind die verallgemeinerten Laguerrepolynome. Setzt man für die innere Clusterfunktion des α-Teilchens

$$\varphi(1,2,3,4) = N_a \left(-a/2 \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i^{\,2}\right) \tag{C.10}$$

ein, mit

$$N_a = \left[\frac{a^3}{4\pi^3}\right]^{3/4} \tag{C.11}$$

und wählt für die Oszillatorbreite a: a= o,543, so erhält man als Oszillatorbreite des n-α-Normkerns

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,(a \cdot \tfrac{4}{5}) = 0{,}217. \tag{C.12}$$

c_{nl} sind Normierungsfaktoren, für die gilt:

$$c_{nl} = \left(\frac{2\,(2\alpha)^{l+3/2}}{\Gamma(n+l+3/2)\,n!}\right)^{1/2}. \tag{C.13}$$

Setzen wir das Potential V_o, das durch (C.7) gegeben ist, in (C.5) ein so erhalten wir

$$\psi_o^+(r) = j_o(kr) - \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{2\mu ik}{\hbar^2}\right) \int_0^\infty\int_0^\infty g_o(r,r'')\,\lambda_i(r'')\,\Lambda_{ik}\,\lambda_k(r'')\,\psi_o^+(r'')\,r''^2 r^2\,dr''\,dr'', \tag{C.14a}$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\psi_o^+ = \varphi_o - \left(\frac{2\mu ik}{\hbar^2}\right) \sum_{i,k=1}^{3} g_o |\lambda_i\rangle \Lambda_{ik} \langle \lambda_k | \psi_o^+ \rangle \tag{C.14b}$$

mit $\varphi_o = j_o$. Gleichung (C.14) wird jetzt im Raum der Zustände λ_1, λ_2 und λ_3 gelöst. Man erhält folgende algebraische Gleichung dritter Ordnung:

$$\begin{pmatrix} A_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \tag{C.15}$$

Die einzelnen Größen sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad A_{ik} = \delta_{ik} - \sum_j G_{ji}\,\Lambda_{ik} \\
&\text{b)} \quad G_{ji} = \langle \lambda_j | g_0 | \lambda_i \rangle = i k \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_j(r')\,\lambda_i(r)\, j_0(kr_<)\, \times \\
&\qquad \times \left[n_0(kr_>) + i\, j_0(kr_>) \right] r'^2\, r^2\, dr'\, dr \cdot \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right) \\
&\text{c)} \quad n_0(kr) + i\, j_0(kr) = h_0^{(1)}(kr) \\
&\text{d)} \quad \varphi_i = \langle \lambda_i | \varphi_0 \rangle \,, \quad \Psi_i = \langle \lambda_i | \Psi_0^+ \rangle \qquad i = 1,2,3 \\
&\text{e)} \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \,.
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

n_1 sind die Neumannfunktionen. Wie der Integrand ausgewertet werden muß zeigt die nachstehende Fig.15.

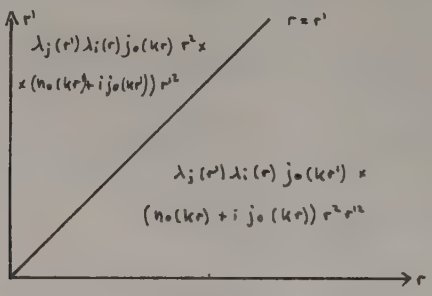


Fig.15

Die Integrationsmethode nach Simpson ergab eine vierstellige Verbesserung der Genauigkeit gegenüber der Trapezregel. Neben den üblichen numerischen Tests wurden die numerischen Ergebnisse mit analytischen Resultaten (wo dies möglich war) verglichen. Beispielsweise für den Imaginärteil von G_{11} erhält man nach analytischer Integration

$$
\mathrm{Im}\, G_{11} = C\, \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha \sqrt{2\alpha}}\, k\, e^{-k^2/2\alpha} \tag{C.17}
$$

mit

$$
C = \frac{8\, m_N}{5\, \hbar^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} = 0.241 \,.
$$

Die Auswertung dieser Formel und der numerischen Integration ergab eine Übereinstimmung auf neun Stellen. Das Programm für die Berechnung der Greensmatrixelemente G_{ij} mit Hilfe der Simpson-Integrationsmethode ist weiter unten beigefügt.

Kennt man die Elemente G_{ij}, so können wir die unbekannten Größen aus der Gleichung (C.15) nach der Cramer'schen Regel berechnen, sofern wir die Potentialstärken Λ_{ik} durch

$$\bar{\Lambda}_{ik} = \begin{pmatrix} \Lambda'_{11} + E & \Lambda_{12} & \varepsilon \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \varepsilon & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \qquad (C.18)$$

ersetzt haben, wobei ε ungleich Null ist. Damit haben wir die Lippmann-Schwinger-Gleichung gelöst, denn auf der rechten Seite von Gleichung (C.14) tauchen additiv und multiplikativ bekannte Größen auf. Allerdings ist die Auswertung der Funktion Ψ_0^+ im Innenbereich wegen $r_>$ und $r_<$ schwierig. Keine Schwierigkeit bereitet hingegen die Berechnung der Phase. Asymptotisch erhalten wir für $g_0(r,r')$ (l=o Partialwelle)

$$g_0(r,r') \xrightarrow[r' \text{ klein}]{r \to \infty} \frac{e^{ikr}}{r} j_\ell(kr') \,. \qquad (C.19)$$

Falls das Potential V_0 genügend schnell abfällt, und das ist bei den Formfaktoren λ_i der Fall, dürfen wir die Formel (C.19) in der Gleichung (C.14) benutzen, und erhalten für die Streuphase

$$\frac{e^{i\delta_0}\sin\delta_0}{k} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^\infty j_0(kr') V_0(r', r'') \Psi_0^+(r'') r'^2 r''^2 \, dr' \, dr'' \,, \qquad (C.20)$$

oder mit den Formfaktoren λ_1, λ_2 und λ_3

$$\frac{e^{i\delta_0}\sin\delta_0}{k} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{i,k=1}^{3} \varphi_i \Lambda_{ik} \Psi_k \,. \qquad (C.21)$$

Kürzen wir den Summenausdruck in Gleichung (C.21) ab durch

$$\sum_{i,k=1}^{3} \varphi_i \Lambda_{ik} \psi_k = S \quad , \tag{C.22}$$

so erhalten wir für die Streuphase

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\, S}{\mathrm{Re}\, S}\right) . \tag{C.23}$$

Damit haben wir die in Paragraph V.4 angegebenen Formel (V.4.19) abgeleitet. Diese Formel wurde mit einem unabhängigen Phasenprogramm, das die Streuphase aus der Lösung der Schrödingergleichung berechnet, verglichen. Dabei wurde zweierlei beobachtet:

i) Die Genauigkeit der Phasenberechnung konnte durch die Formel (C.23) um vier Stellen verbessert werden.

ii) Die Formel (C.23) liefert auch für kleine Impulse k zuverlässige Phasenwerte, sofern bei der Berechnung der Greensmatrixelemente mit hinreichend großer Stützpunktzahl gearbeitet wird.

```
10=       SUBROUTINE GREEN(GRR,GRI,E,MI,H)
20=C      PROGRAM GREENMATRIXELEMENTE  (Simpson)
30=       DIMENSION GRR(3,3),GRI(3,3),SL(2000),CL(2000),FF(3,2000),X(2000),
40=      1F(2000),ES(3,2000),EC(3,2000),W(2000),T(2000),ESSEC(2000),
50=      2ESSES(2000)
60=       A=0.217
70=       N=3
80=       C=0.241
90=       AK=SQRT(C*E)
100=       DO 10 LI=1,MI
110=10     X(LI)=FLOAT(LI)*H
120=       DO 20 J=1,N
130=       CALL OSFU(X,F,MI,J,0,A)
140=       DO 20 K=1,MI
150=20     FF(J,K)=F(K)
160=       DO 30I=1,MI
170=       SL(I)=SIN(AK*X(I))
180=30     CL(I)=-COS(AK*X(I))
190=       DO 3 K=1,3
200=       DO 3 I=1,MI
210=       ES(K,I)=FF(K,I)*SL(I)
220=3      EC(K,I)=FF(K,I)*CL(I)
230=       MI1=MI-1
240=       MIH=MI/2
250=       DO 37 I=1,MIH
260=       W(2*I-1)=4.0
270=       W(2*I)=8.0
280=       T(2*I-1)=8.0
290=37     T(2*I)=16.0
300=       DO 4 L=1,3
310=       DO 4 L1=1,3
320=       SESEC1=0.0
330=       SESES1=0.0
340=       DO 251 K=2,MI,2
350=       SEC=0.0
360=       SES=0.0
370=       DO 252 N=K,MI
380=       SES=SES+W(N-K+1)*ES(L1,N)
390=252    SEC=SEC+W(N-K+1)*EC(L1,N)
400=       ESSES(K)=ES(L,K)*SES/9.0
410=       ESSEC(K)=ES(L,K)*SEC/9.0
420=       SESES1=SESES1+ESSES(K)
430=251    SESEC1=SESEC1+ESSEC(K)
440=       SESEC2=0.0
450=       SESES2=0.0
460=       DO 253 K=1,MI1,2
470=       SES=0.0
480=       SEC=0.0
490=       DO 254 N=K,MI
500=       SES=SES+T(N-K+1)*ES(L1,N)
510=254    SEC=SEC+T(N-K+1)*EC(L1,N)
520=       ESSES(K)=ES(L,K)*SES/9.0
530=       ESSEC(K)=ES(L,K)*SEC/9.0
540=       SESES2=SESES2+ESSES(K)
550=253    SESEC2=SESEC2+ESSEC(K)
560=       ZIU=SESES2+SESES1
570=       ZRU=SESEC2+SESEC1
580=       SESES3=0.0
590=       SESEC3=0.0
600=       DO 255 K=1,MI1,2
610=       SES=0.0
```

```
620=        SEC=0.0
630=        K1=K+1
640=        DO 256 N=K1,MI
650=        SES=SES+ES(L,N)*T(N-K+1)
660=256     SEC=SEC+EC(L,N)*T(N-K+1)
670=        ESSES(K)=ES(L1,K)*SES/9.0
680=        ESSEC(K)=ES(L1,K)*SEC/9.0
690=        SESES3=SESES3+ESSES(K)
700=255     SESEC3=SESEC3+ESSEC(K)
710=        SESES4=0.0
720=        SESEC4=0.0
730=        DO 257 K=2,MI,2
740=        SES=0.0
750=        SEC=0.0
760=        IF(K.EQ.MI) GOTO 257
770=        K1=K+1
780=        DO 258 N=K1,MI
790=        SES=SES+ES(L,N)*W(N-K+1)
800=258     SEC=SEC+EC(L,N)*W(N-K+1)
810=        ESSES(K)=ES(L1,K)*SES/9.0
820=        ESSEC(K)=ES(L1,K)*SEC/9.0
830=        SESES4=SESES4+ESSES(K)
840=257     SESEC4=SESEC4+ESSEC(K)
850=        ZIC=SESES4+SESES3
860=        ZRC=SESEC4+SESEC3
870=        GRR(L,L1)=(ZRC+ZRC)*F*F*C/AK
880=4       GRI(L,L1)=-(ZIC+ZIC)*H*H/AK*C
890=        DO 8 K=1,3
900=        WRITE(4,300) K
910=300     FORMAT(1HO,'K=',I3)
920=        WRITE(4,301) (FF(K,I),I=1,5)
930=301     FORMAT(1HO,'FF=',3E20.12)
940=8       CONTINUE
950=        DO 303 K=1,3
960=        WRITE(4,305) K
970=305     FORMAT(1HO,'K=',I4)
980=        WRITE(4,307) (GRR(K,I),I=1,3,1)
990=        WRITE(4,302) (GRI(K,I),I=1,3,1)
1000=307     FORMAT(1HO,'GRR:',3E20.12)
1010=302     FORMAT(1HO,'GRI:',3E20.12)
1020=303     CONTINUE
1030=        RETURN
1040=        END
```

Literatur

/1/ K.Wildermuth, Y.C.Tang, A Unified Theory of the Nucleus, Vieweg, Braunschweig,1977

/2/ E.W. Schmid, preprint, April 1977

/3/ E.W. Schmid, to be published in Phys. Rev.C, 1979

/4/ E.W. Schmid und M.L'Huillier, preprint, November 1979

/5/ E.W. Schmid, AIP Conference Proceedings, 47,528, 1978

/6/ H.Seichter, Dissertation, Universität Tübingen, 1979

/7/ H.C.Benöhr und Wildermuth, Phys.Lett. B,26,2,1967,68
H.C.Benöhr und Wildermuth, Nucl.Phys. A129,1969, 1-33

/8/ W.M.Kloet und J.A.Tjon in "Few Particle Problems in the Nuclear Interaction",Los Angeles Conference 1972, North-Holland

/9/ W. Ebenhöh, Nucl.Phys. A191,97,1972

/10/ P.Dolleschall, Nucl.Phys. A201,1973,264-288

/11/ S.Oryu,M.Araki, undS. Satoh, Prog.Theor.Phys. Suppl.,61, 1977, 199
S.Oryu, Prog.Theor. Phys. 52, 1974,550

/12/ E.W.Schmid,Vortrag beim "Intern. Symposium on Few Particle Problems in Nuclear Physics" Dubna,USSR,1979

/13/ E.W. Schmid, preprint, März 1979,Tübingen

/14/ R. Kircher, Dissertation (in Vorbereitung), Tübingen

/15/ M.G.Fuda, Nucl.Phys. A116,1968,83

/16/ E.Harms, Phys.Rev. C1 (1970),1667

/17/ R.Schranner, Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1972

/18/ S.Fiarman, S.S.Hanna Nucl.Phys.,A251,1,1975

/19/ O.A.Yakubovsky,Yad.Fiz.(UdSSR),5,1312,1967

/20/ I.M.Narodetsky, Nucl.Phys.,A221,191,1974

/21/ J.A.Tjon, Phys.Lett.,56B,217, 1975

/22/ A.G.Baryshnikov, I.M. Blokhintsev, I.M.Narodetsky
Phys. Lett.51B, 432, 1974

/23/ J.L.Basdevant, R.Kreps, Phys.Rev. 141,1398, 1965;
141, 1404, 1965

/24/ W. Glöckle, Nucl.Phys.,A158, 1970;
A175, 337, 1971

/25/ Proc. Int. Conf. on Few Particle Problems in the Nuclear
Interaction, Los Angeles, 1972, Seiten 519-550

/26/ L.D. Faddeev, JETP (UdSSR), 39, 1459, 1960

/27/ B.R. Karlsson und E.M. Zeiger, Phys. Rev. D11,939,1975

/28/ E.O.Alt,P.Grassberger, W.Sandhas, Nucl.Phys. B2, 167,1967

/29/ A.M.Baladyan,Yu. Simonov, Yad.Fiz.,17(1973),441;
18(1973) 73

/30/ A.M.Baladyan,F.S.Birger und N.B.Konyuklova,Yad. Fiz.
20, 1974, 1147

/31/ M.B.Voloshyn, L.B. Okun,preprint ITEP,43,1977

/32/ J.H.Hetherington, L.S.Schick,Phys.Rev.,137B

/33/ F.Sohre, H.Ziegelmann, Phys.Lett.,34B,579, 1971

/34/ V.B.Belyaev,V.N.Efimov,E.G.Tkatschenko,H.Schulz, Yad.Fiz.(UdSSR),18,779,1973

/35/ V.B.Belyaev und K.Möller,Z.Physik A279 (1976),47
K.Möller,ZfK-327 (1977)
K.Möller, Proc. of the Europ. Symp. of Few Particle Physics in Nuclear Physics,Potsdam, 11-14,1977

/36/ W.Glöckle, Nucl.Phys.A175,337,1971

/37/ P.Beregi, Z.Physik,257,440-447,1972 und die dort zitierten Referenzen

/38/ A.M.Baladyan und Yu.Siminov, ITEP-89,1973

/39/ A.M.Baladyan und Yu.Simonov, Particles and Nuclei 6 1975, 229

/40/ A.M. Baladyan,Yu.Simonov,Yad.Fiz.,11,(1975) 890

/41/ G.V.Skornyakov, K.A.Ter-Martirosyan,JETP,31,1956,775
Y.E.Kim,A.Tubis,Phys.Rev.,C1,1970,1414

/42/ Simonov, The Resonances in the Three-Particle System , Proc. of the Europ.Symp. on Few-Particle Problems in Nuclear Physics, Potsdam, 1977

/43/ G.G. Ohlsen,Nuclear Instruments and Methodes, 37,1965, 240-248

/44/ S.D.Angelo, F.de Notaristefani und P.Manacelli, Nuclear Instruments and Methods,1o3,1972, 197-210

/45/ W.Kluge, Fortschritte der Physik 22,691-774, 1974

/46/ P.Kramer, Dissertation, Marburg, 1963

/47/ K.M. Watson, Phys.Rev., 88,1167, (1952)
A.B.Migdal, ZhETF 28, 3,1955

/48/ R.D.Amado, Phys. Rev. 158, 1414,(1967)

/49/ R.Mader , Dissertation, Universität Tübingen, 1976

/50/ E.W.Schmid und H.Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three-Body-Problem, Vieweg, Braunschweig, 1974

/51/ C.Zupancic,Rev.Mod.Phys.,37,(1965),330

/52/ E.P.Wigner, Phys.Rev. 98,1, (1955), 145

/53/ M.Gregorio, D.R. Avalos,J.Math.Phys. 15,3,367 (1974)

/54/ H. Ziegelmann, Habilitationsschrift, Tübingen,1976

/55/ H.P.Noyes, Introductary Review in "Three-Body Problems, (J.S.Ms Kee and P.M.Rolph,Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1970

/56/ A.Laverne und C.Gignoux, Nucl.Phys. A203 (1973), 597

/57/ S.P.Merkuriev, Theor.Mat.Fiz. 17 (1973), 221; Theor.Math. Phys. 17, 1973, 1105; Theor.Math.Phys. 8, 1971, 395

/58/ S.P.Merkuriev, Nucl.Phys. A233 (1974), 1350

/59/ C.Gignoux, A.Laverne und S.P.Merkuriev, Phys. Rev.Lett.33,1974, 1350

/60/ S.P.Merkuriev, C.Gignoux und Laverne, Ann.of Phys. 99,30-71, 1976

/61/ J.Nutall, Phys.Rev. Lett. 19 (1967),473

/62/ J.Nutall und J.G.Webb, Phys. Rev. 178, (1969),2226

/63/ J.Nutall, J. Math.Phys. 12 (1971),1896

/64/ W.Glöckle, Nucl.Phys. A141, 1970, 620

/65/ R.T.Cahill und I.H.Sloan, Nucl.Phys. A165,161,1971

/66/ F.Sohre, H.Ziegelmann, Proc.of the Symp. on the Nuclear Three-Body-Problem, Budapest, 1971

/67/ B.Zeitnitz, R.Maschuw,P.Suhr, und W.Ebenhöh in Few Particle Problems in the Nuclear Interaction, ed. I.Slaus, S.A.Moszkowski, R.P.Haddock und W.T.H. van Oers, North-Holland, Amsterdam, 1972

/68/ R. Bouchez et al. Nucl.Phys.A185, 166,1972

/69/ R.Bouchez, Acta Phys. Acad.Sci.Hung.33,151,1973

/70/ P. Dolleschall,Phys. Lett. 40B, 443,1972

/71/ W.Glöckle, Nucl.Phys. A141, 1970, 620

/72/ R.G.Newton, Ann.Phys. 34,324, 1972

/73/ R.G.Newton, Ann.Phys. 78,561, 1973

/74/ R.G.Newton, J. Math.Phys. 12,1552 (1971)

/75/ M. Fabre de la Ripelle, The First Order of the Hyperspherical Harmonic Expansion Method, preprint, Orsay, 1979

/76/ S.Saito,Prog. Theor. Phys. 4o(1968),893

/77/ S.Saito, Prog. Theor.Phys. 41 (1969),705

/78/ V.M.Krasnopolsky und V.I.Kukulin, Soviet J.Nuclear Phys. 20 (1974) ,883

/79/ V.I.Kukulin,V.N.Pomerantsev und V.G.Neudatchin, Sowiet J-Nuclear Phys. 24 (1976) ,298

/80/ V.I.Kukulin,V.N. Pomerantsev, Soviet J.Theor. Math. Phys. 27, (1976), 373

/81/ V.I.Kukulin und V.N. Pomerantsev, Ann.Phys.,111,2, (1978), 330

/82/ E.W.Schmid und H.Ziegelmann in Proc. of VII Intern.Conf. on Few Body Problems in Nuclear and Particle Physics,Dehli, (1976), 418-422, North-Holland

/83/ H.Seichter, Diplomarbeit,Universität Tübingen, 1976

/84/ H.Horiuchi, Suppl. of Prog. Theor. Phys. 62, (1977), 90

/85/ E.W.Schmid, Vortrag bei, Intern. Symp. on Few Particle Problems in Nucl. Physics, Dubna, 1979

/86/ A.Böinghoff,H.Hüsken und A.Weiguny, Phys.Lett. 61B (1976), 9
A.Weiguny, Fizika 9 (1977), Supplement 3,115-140

/87/ S.Saito, S.Okai, R.Tamagaki, M.Yasuno, Prog. of Theor. Phys. 50, (1973), 1561

/88/ D.Clement,E.W.Schmid, A.G. Teufel, Phys.Lett. B (1974), 308

/89/ E.W.Schmid, Proc. of the "Workshop on Few-Body Problems in Nuclear Physics", Trieste, 1978

/90/ R.G.Newton und R.Shtokhammer, Phys.Rev.A, 14, 642,(1976)

/91/ V.S.Potapov und J.R.Taylor, Phys.Rev. A, 16, 2276 (1977)

/92/ V.S.Potapov und J.R.Taylor, Phys.Rev. A, 16, 2264 (1977)

/93/ E.I. Copson, Asymptotic Expansions, Cambridge Tracts in Mathamatics and Mathematical Physics, Cambridge, 1971

/94/ L. Sirovich, Technique of Asymptotic Analysis, Springer-Verlag, New York, 1971

Dankeswort

Es wäre zu lakonisch und zu formelhaft Herrn Prof. Dr.E.W. Schmid für die Anregung zu und sein stetes Interesse an dieser Arbeit zu danken. Dieser Dank ist ihm ohnehin gewiß.

Vielmehr möchte ich ihm großen Dank sagen für seine behutsame Heranführung des Adepten an die Natur der physikalischen Probleme und für seine engagierte und verständnisvolle Betreuung - wohldosiert zwischen dem Höchstmaß an Bewegungsfreiheit und dem unabdingbaren Mindestmaß an Sekuritätsmaßnahmen im Hochgebirge der physikalischen Probleme. Nicht selten wurde der junge Kletterer wenn nicht vor dem Absturz so doch vor dem sicheren Beinbruch bewahrt.

Ganz herzlich danke ich Herrn Prof.Dr.H.P. Noyes für seine kritische Durchsicht des Kapitels IV und für den Hinweis auf die Zitate /91/ und /92/. Für die Überprüfung der asymptotischen Formeln der vollen Drei-Teilchen-Resolvente bin ich Dr. M.L'Huillier sehr verbunden.

Mein besonderer Dank gilt Herrn R.Kircher für seine kritischen Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge zum Manuskript.

Dank schulde ich meinen Kollegen Herrn R.Kircher,K.Hahn,H.Seichter, Dr.H.Ziegelmann, Dr.F.Sohre, Dr.W.Sünkel und Prof.S.Oryu für viele aufschlußreiche Gespräche und Diskussionen.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Promotion und für die ideelle Förderung,die meine Interessen und meine geistigen Horizonte erheblich geweitet hat, bin ich der Friedrich Naumann Stiftung sehr verbunden. In diesem Zusammenhang bin ich besonders Herrn Schroers aber auch Frau Rothlach und Herrn Stützer für ihr persönliches Interesse und ihre Hilfe dankbar.

Die numerischen und viele algebraische Rechnungen wurden auf der Rechenanlage TR 440 des Zentrums für Datenverarbeitung Tübingen durchgeführt. Den Mitarbeitern des Zentrums für Datenverarbeitung danke ich an dieser Stelle für ihre Hilfe.

Lebenslauf

Am 10.5.51 bin ich als Sohn des Univ.Prof.Miroslaw Orłowski und seiner Frau Maria Orłowska,geb. Caspaeri-Chraszczewska in Warschau geboren. Meine Mutter ist Architektin.
Durch meine Abstammung und Geburt bin ich polnischer Staats-Bürger.

Von 1957-1964 besuchte ich die Volksschule in Warschau und legte im Mai 1964 dort am Lyzeum Żmichowskiej eine Aufnahme-Prüfung zum Besuch der Höheren Schule mit Erfolg ab. Die Höhere Schule jedoch besuchte ich nicht in Polen, sondern trat im September 1964 in die Quarta der Schule Schloß Salem ein. 1970 legte ich an dieser Internatsschule das Abitur ab, und begann im Herbst desselben Jahres das Studium der Physik an der Universität Tübingen. Im Februar 1973 legte ich die Vordiplomprüfung und im Oktober 1976 die Diplomprüfung in Physik ab. 1976 nahm ich das Studium der Volkswirtschaft auf.1977 legte ich die Zwischen-prüfung in Volkswirtschaft ab.
Das Thema der vorliegenden Dissertation erhielt ich im März 1977 von Herrn Prof.Dr. E.W.Schmid, unter dessen Anleitung ich die Arbeit fertigstellte.

Mathematik- und Physikvorlesungen habe ich bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten gehört:

M.Baumann,G.Dähn,F.Gönnenwein,H.Heyer,R.P.Huebener,P.Kramer, H.Krüger,O.Lutz,G.Mack,G.Möllenstedt,R.Mühleisen,R.Nagel,H.Pfister, H.Saltzmann,H.Schaefer,E.W.Schmid,P.Schmid,R.Speitel,H.Stumpf, F.Wahl,A.Wolf,K.Wildermuth,H.Ziegelmann.

Druck: D. Gräbner, 8602 Altendorf, Tel. 09545/8791